

$$(1) r = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6} \cos \theta} \quad \text{--- ① について, (右辺) } \neq 0 \text{ より } r \neq 0 \text{ である}$$

極方程式では $r < 0$ も考え

$(r, \theta) = (-r, \theta + \pi)$ である

(i) $r > 0$ のとき

つまり $2 + \sqrt{6} \cos \theta > 0$ のとき

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

をみたすので

$$\text{①は } 2r + \sqrt{6} r \cos \theta = \sqrt{6} \text{ より}$$

$$2r = \sqrt{6} - \sqrt{6} x$$

$$2\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{6}(1 - x) \quad \text{--- ②}$$

をみたす、但し、この左辺は正より

$$1 - x > 0 \text{ だから } x < 1$$

②の両辺を2乗すると

$$4(x^2 + y^2) = 6(1 - x)^2 \text{ より}$$

$$4x^2 + 4y^2 = 6(1 - 2x + x^2)$$

$$2x^2 - 12x - 4y^2 + 6 = 0$$

$$x^2 - 6x - 2y^2 + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 2y^2 = 6$$

$$\text{ゆえに } \frac{(x - 3)^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$$

$$(\text{但し } x < 1) \text{ となる}$$

(ii) $r < 0$ のとき

つまり $2 + \sqrt{6} \cos \theta < 0$ のとき

$$\begin{cases} (r, \theta) = (-r, \theta + \pi) \\ x = -r \cos(\theta + \pi) \\ y = -r \sin(\theta + \pi) \\ -r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

をみたすので

$$\text{①は } 2r + \sqrt{6} r \cos \theta = \sqrt{6} \text{ より}$$

$$2r - \sqrt{6} r \cos(\theta + \pi) = \sqrt{6}$$

$$2r + \sqrt{6} x = \sqrt{6}$$

$$-2r = \sqrt{6}(x - 1) \quad \text{--- ③}$$

をみたす、但しこの左辺は正より

$$x - 1 > 0 \text{ だから } x > 1$$

③の両辺を2乗すると

$$4r^2 = 6(x - 1)^2 \text{ より}$$

$$4(x^2 + y^2) = 6(1 - 2x + x^2)$$

$$2x^2 - 12x - 4y^2 + 6 = 0$$

$$x^2 - 6x - 2y^2 + 3 = 0$$

$$(x - 3)^2 - 2y^2 = 6$$

$$\text{ゆえに } \frac{(x - 3)^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \quad (\text{但し } x > 1)$$

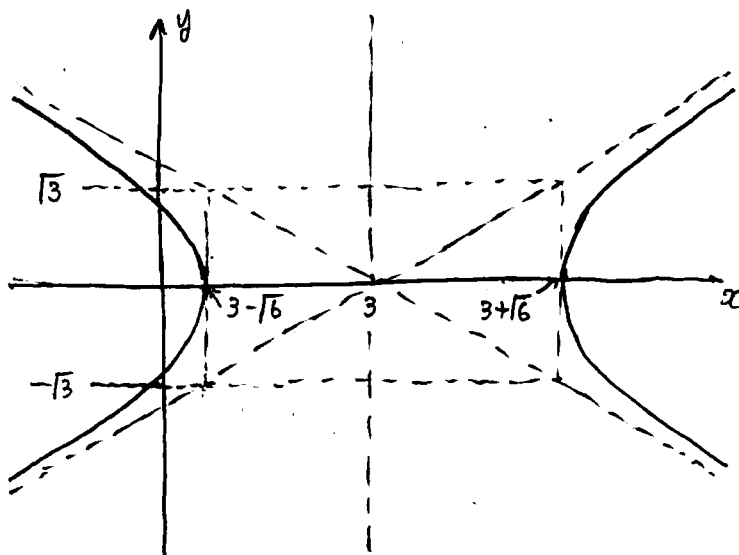
となる

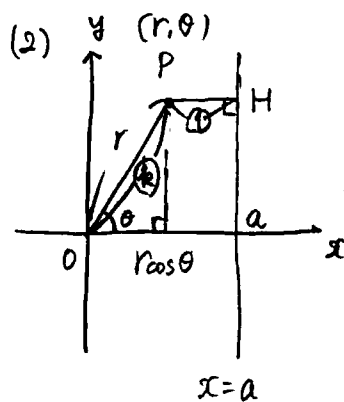
以上(i)より求める (x, y) の方程式は

$$\boxed{\frac{(x - 3)^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1} \text{ であり}$$

$$\text{これは双曲線 } \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ を}$$

x 軸方向に3平行移動したもの
である





(1) (i) で $r > 0$ のとき (P の x 座標が $x < 1$ のとき)

$$PH = a - r \cos \theta, \quad OP = r \text{ であり}$$

$$\frac{OP}{PH} = k \text{ より } \frac{r}{a - r \cos \theta} = k \text{ だから}$$

$$r = k(a - r \cos \theta)$$

$$(1 + k \cos \theta) r = ka \quad \text{--- (4)}$$

$$\therefore \text{ " } r = \frac{16}{2 + \sqrt{6} \cos \theta} \text{ より } (1 + k \cos \theta) \times \frac{16}{2 + \sqrt{6} \cos \theta} = ka \text{ だから}$$

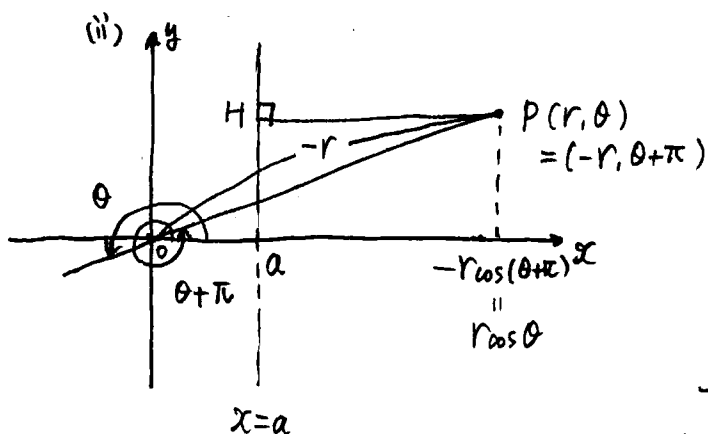
$$16(1 + k \cos \theta) = 2ka + 16ka \cos \theta$$

$$(16 - 2ka) + 16k(1 - a) \cos \theta = 0$$

よって $a = 1$ のとき θ の値によらず "

$$16 - 2k = 0 \text{ となるので}$$

$$k = \frac{16}{2} \text{ で一定の値をとる}$$



(1) (i) で $r < 0$ のとき (P の x 座標が $x > 1$ のとき)

$$PH = r \cos \theta - a, \quad OP = -r \text{ であり}$$

$$\frac{OP}{PH} = k \text{ より}$$

$$\frac{-r}{r \cos \theta - a} = k \text{ だから}$$

$$-r = k(r \cos \theta - a) \text{ より}$$

$$(k \cos \theta + 1) r = ak \quad \text{--- (5)}$$

$$\therefore \text{ " } r = \frac{16}{2 + \sqrt{6} \cos \theta} \text{ より } (k \cos \theta + 1) \times \frac{16}{2 + \sqrt{6} \cos \theta} = ak \text{ から}$$

$$16k \cos \theta + 16 = 2ak + 16ak \cos \theta$$

$$16k(1 - a) \cos \theta + (16 - 2ak) = 0$$

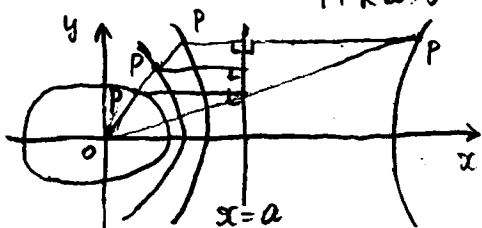
よって $a = 1$ のとき θ の値によらず $16 - 2k = 0$ となるので

$$k = \frac{16}{2} \text{ で一定の値をとる}$$

以上 (i) (ii) より k が一定となるときの k, a の値は $k = \frac{16}{2}, a = 1$ となる

④ ⑤ より $r = \frac{ka}{1 + k \cos \theta}$

であり、このとき $x = a$ は準線、 k は離心率とよばれている



$\left\{ \begin{array}{l} 0 < k < 1 \text{ なら 楕円} \\ k = 1 \text{ なら 放物線} \\ k > 1 \text{ なら 双曲線 になる} \end{array} \right.$