

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n+1} + x^5 + x^3}{x^{2n} + x^2 + 1}$$

(1) i) $|x| < 1$ のとき $n \rightarrow \infty$ のとき $x^{2n} \rightarrow 0, x^{2n+1} \rightarrow 0$ より

$$f(x) = \frac{x^5 + x^3}{x^2 + 1} = \frac{x^3(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \boxed{x^3}$$

ii) $|x| > 1$ のとき

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{x^5}{x^{2n+1}} + \frac{x^3}{x^{2n+1}}}{\frac{1}{x} + \frac{x^2}{x^{2n+1}} + \frac{1}{x^{2n+1}}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \boxed{x}$$

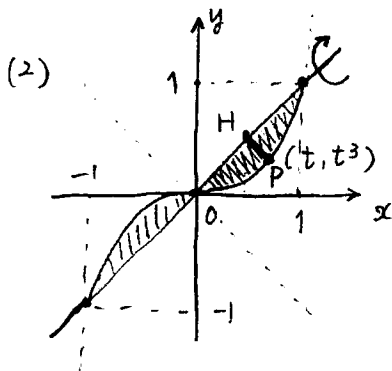
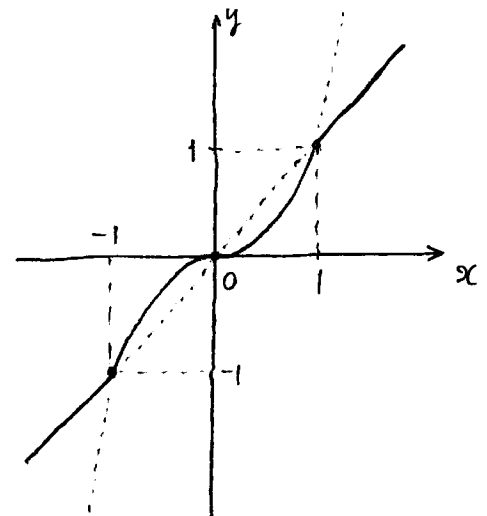
iii) $x = 1$ のとき

$$f(x) = \frac{1+1+1}{1+1+1} = \boxed{1}$$

iv) $x = -1$ のとき

$$f(x) = \frac{-1-1-1}{1+1+1} = \boxed{-1}$$

よってグラフは右図のようになる。



$y = x^3$ も $y = x$ も原点对称だから、第1象限だけで考えたものを2倍すればよいから、求める体積を V とすると

$y = x^3$ 上の点 $P(t, t^3)$ と $y = x$ との距離は

$$\frac{|t - t^3|}{\sqrt{1 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |t - t^3| = \frac{1}{\sqrt{2}} (t - t^3)$$

また $P(t, t^3)$ と $y = -x$ との距離は

$$\frac{|t + t^3|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} |t + t^3| = \frac{1}{\sqrt{2}} (t + t^3)$$

P から $y = x$ に下ろした垂線の足を H とすると

$$x = t \text{ のとき } OH = \frac{1}{\sqrt{2}} |t + t^3| \text{ より}$$

$$\frac{d \cdot OH}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 3t^2)$$

$$\begin{array}{r|l} t & 0 \cdots 1 \\ OH & 0 \cdots \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}$$

を考えて

$$\begin{aligned}
V &= 2 \times \int_0^{\sqrt{2}} \pi \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} (t - t^3) \right\}^2 \cdot dO_H \\
&= 2\pi \int_0^1 \times \frac{1}{2} (t - t^3)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + 3t^2) dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (t - t^3)^2 (1 + 3t^2) dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (t^2 - 2t^4 + t^6) (1 + 3t^2) dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (3t^8 - 5t^6 + t^4 + t^2) dt \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[3 \times \frac{t^9}{9} - 5 \times \frac{t^7}{7} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{7} + \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \times \frac{70 - 75 + 21}{105} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi \times \frac{16}{105} \\
&= \boxed{\frac{8\sqrt{2} \pi}{105}}
\end{aligned}$$