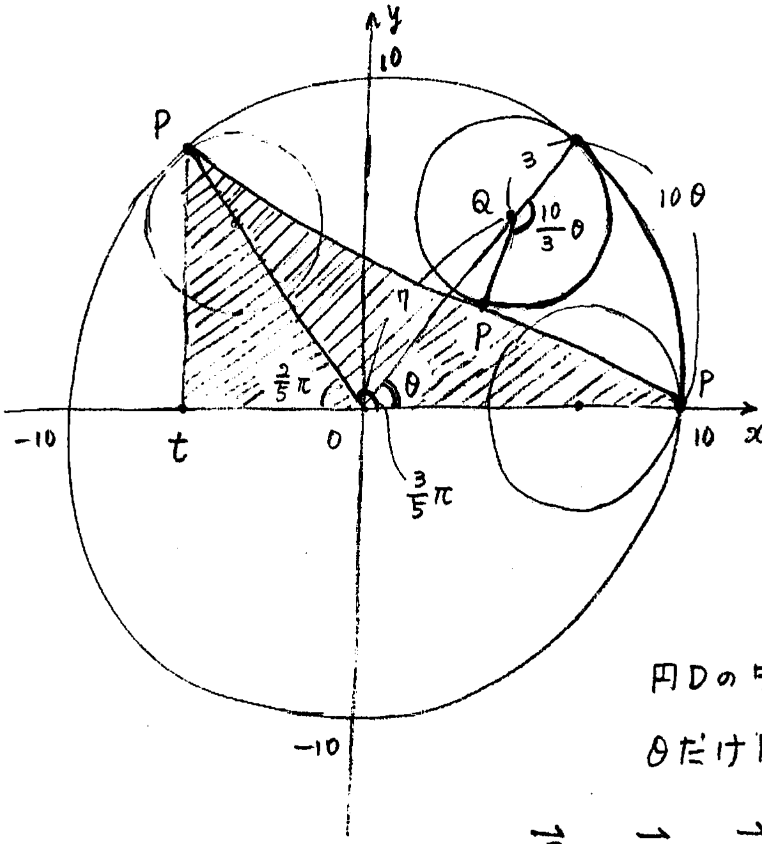

円Cの円周は 20π

円Dの円周は 6π より

点Pが円Cに接してから

再び接するまでには

円Cのまわりを

$$2\pi \times \frac{6}{20} = \frac{3}{5}\pi \text{ だけ回る}$$

ことになる

円Dの中心をQとおくと，円Dが円Cのまわりを

θだけ回転させたとき

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OP} &= (7\cos\theta, 7\sin\theta) + \left(3\cos\left(\theta - \frac{10}{3}\theta\right), 3\sin\left(\theta - \frac{10}{3}\theta\right)\right) \\
&= \left(7\cos\theta + 3\cos\left(-\frac{7}{3}\theta\right), 7\sin\theta + 3\sin\left(-\frac{7}{3}\theta\right)\right) \\
&= \left(7\cos\theta + 3\cos\frac{7}{3}\theta, 7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta\right)
\end{aligned}$$

よって $\overrightarrow{OP} = (x, y)$ とすると $\begin{cases} x = 7\cos\theta + 3\cos\frac{7}{3}\theta \\ y = 7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta \end{cases}$

ここで
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{d\theta} &= 7\cos\theta - 3 \times \frac{7}{3}\cos\frac{7}{3}\theta \\
&= 7\left(\cos\theta - \cos\frac{7}{3}\theta\right) \\
&= 7 \times (-2)\sin\frac{\theta + \frac{7}{3}\theta}{2} \cdot \sin\frac{\theta - \frac{7}{3}\theta}{2} \\
&= -14\sin\frac{5}{3}\theta \sin\left(-\frac{2}{3}\theta\right) \\
&= 14\sin\frac{2}{3}\theta \sin\frac{5}{3}\theta \quad \text{より}
\end{aligned}$$

$0 < \theta < \frac{3}{5}\pi$ では $\frac{dy}{d\theta} > 0$ より yは単調増加であるから

Pが，θの正方向にころがり始めたとき，

x軸より下方にいくことはない．

よって 図の斜線部の面積を S とすると

$$\frac{dx}{d\theta} = -7\sin\theta - 3\times\frac{7}{3}\sin\frac{7}{3}\theta = -7\left(\sin\theta + \sin\frac{7}{3}\theta\right)$$ より

$$S = \int_{t}^{10} y\cdot dx$$

$$= \int_{\frac{3}{5}\pi}^{0} \left(7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\cdot(-7)\cdot\left(\sin\theta + \sin\frac{7}{3}\theta\right)\cdot d\theta$$

$$= 7\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi} \left(7\sin\theta - 3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(\sin\theta + \sin\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$= 7\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi} \left(7\sin^2\theta + 4\sin\theta\sin\frac{7}{3}\theta - 3\sin^2\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$= 7\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi} \left[7\times\frac{1-\cos 2\theta}{2} - 2\left\{\cos\left(\theta+\frac{7}{3}\theta\right) - \cos\left(\theta-\frac{7}{3}\theta\right)\right\} - 3\times\frac{1-\cos\frac{14}{3}\theta}{2}\right]d\theta$$

$$= 7\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi} \left(\frac{7}{2} - \frac{7}{2}\cos 2\theta - 2\cos\frac{10}{3}\theta + 2\cos\frac{4}{3}\theta - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{14}{3}\theta\right)d\theta$$

$$= 7\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi} \left(2 - \frac{7}{2}\cos 2\theta - 2\cos\frac{10}{3}\theta + 2\cos\frac{4}{3}\theta + \frac{3}{2}\cos\frac{14}{3}\theta\right)d\theta$$

$$= 7\left[2\theta - \frac{7}{4}\sin 2\theta - 2\times\frac{3}{10}\sin\frac{10}{3}\theta + 2\times\frac{3}{4}\sin\frac{4}{3}\theta + \frac{3}{2}\times\frac{3}{14}\sin\frac{14}{3}\theta\right]_{0}^{\frac{3}{5}\pi}$$

$$= 7\left(2\times\frac{3}{5}\pi - \frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi - \frac{3}{5}\sin 2\pi + \frac{3}{2}\sin\frac{4}{5}\pi + \frac{9}{28}\sin\frac{14}{5}\pi\right)$$

$$= 7\left(\frac{6}{5}\pi + \frac{7}{4}\sin\frac{4}{5}\pi + \frac{3}{2}\sin\frac{4}{5}\pi + \frac{9}{28}\sin\frac{4}{5}\pi\right)$$

$$= 7\left(\frac{6}{5}\pi + \frac{49+42+9}{28}\sin\frac{4}{5}\pi\right)$$

$$= \frac{42}{5}\pi + \frac{100}{4}\sin\frac{4}{5}\pi$$

$$= \frac{42}{5}\pi + 25\sin\frac{4}{5}\pi$$

ゆえに、求める面積の大きい方を S_1，小さい方を S_2 とすると

$$S_1 = S - \frac{1}{2} \times 10 \sin\frac{2}{5}\pi \times 10 \cos\frac{2}{5}\pi + 10^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{7}{5}\pi$$

$$= \frac{42}{5}\pi + \cancel{25 \sin\frac{4}{5}\pi} - \cancel{25 \sin\frac{4}{5}\pi} + 70\pi$$

$$= \frac{42+350}{5}\pi = \boxed{\frac{392}{5}\pi}$$

$$S_2 = 10^2\pi - S_1$$

$$= 100\pi - \frac{392}{5}\pi$$

$$= \frac{500\pi - 392\pi}{5}$$

$$= \boxed{\frac{108}{5}\pi}$$

よって $\boxed{\text{2つの部分の面積は } \frac{108}{5}\pi \text{ と } \frac{392}{5}\pi \text{ である}}$