(1) $y' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x$

$= -e^{-x}(\sin x - \cos x)$

$= -e^{-x} \times \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ であり

$y' = 0$ とすると $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ より $x = \frac{\pi}{4} + n\pi$ (nは0以上の整数)

また $y'' = e^{-x}\cdot\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - e^{-x}\cdot\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2}e^{-x}\left\{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

$= \sqrt{2}e^{-x}\cdot\sqrt{2}\sin\left\{\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right\}$

$= 2e^{-x}\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

よって $\sin\left(\frac{\pi}{4} + n\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0 & (n = 0, 2, 4, \cdots) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} > 0 & (n = 1, 3, 5, \cdots) \end{cases}$$

ゆえに $x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$ $(m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ のとき yは極大値

$x = \frac{\pi}{4} + (2m+1)\pi$ $(m = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ のとき yは極小値をとる。

ここで $x = \frac{\pi}{4} + 2m\pi$ のとき $y = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)$

$y = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{\pi}{4} + 2m\pi\right)}$ より

$m = 0$ で yは最大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$ となる。

$x = \frac{\pi}{4} + (2m+1)\pi$ のとき $y = e^{-\left\{\frac{\pi}{4} + (2m+1)\pi\right\}}\cdot\sin\left\{\frac{\pi}{4} + (2m+1)\pi\right\}$

$y = e^{-\left(\frac{5}{4}\pi + 2m\pi\right)}\cdot\sin\left(\frac{5}{4}\pi + 2m\pi\right)$

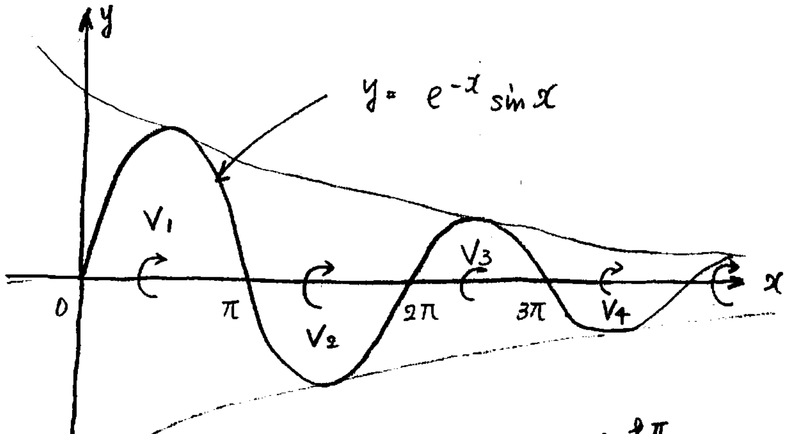
$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\left(\frac{5}{4}\pi + 2m\pi\right)}$ より

$m = 0$ で yは最小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$ となる。

ゆえに

最大値は $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ($x = \frac{\pi}{4}$ のとき)

最小値は $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$ ($x = \frac{5}{4}\pi$ のとき)



(2) $V_k = \pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \{ e^{-x} \sin x \}^2 \cdot dx$

$$V_k = \pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} \sin^2 x \, dx$$

$$\boxed{V_k} = \pi \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x} \cdot \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \left(e^{-2x} - e^{-2x} \cos 2x \right) dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[-\frac{1}{2} e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} (\sin 2x - \cos 2x) \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4} \cdot \left[e^{-2x} \cdot (2 + \sin 2x - \cos 2x) \right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{8} \left\{ e^{-2k\pi} (2 + \sin 2k\pi - \cos 2k\pi) - e^{-2(k-1)\pi} \left(2 + \sin 2(k-1)\pi - \cos 2(k-1)\pi\right) \right\}$$

$$= -\frac{\pi}{8} \left(e^{-2k\pi} - e^{-2(k-1)\pi} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{8} \left(e^{-2k\pi} - e^{-2k\pi} \cdot e^{2\pi} \right)$$

$$= -\frac{\pi}{8} e^{-2k\pi} (1 - e^{2\pi})$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{8} (e^{2\pi} - 1) e^{-2k\pi}}$$

(3) $\dfrac{V_{k+1}}{V_k} = \dfrac{\frac{\pi}{8}(e^{2\pi}-1)\,e^{-2(k+1)\pi}}{\frac{\pi}{8}(e^{2\pi}-1)\,e^{-2k\pi}} = \dfrac{e^{-2k\pi}\cdot e^{-2\pi}}{e^{-2k\pi}} = \boxed{e^{-2\pi}}$

(4) $\begin{cases} V_1 = \frac{\pi}{8}(e^{2\pi}-1)e^{-2\pi} = \frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi}) \\ V_{n+1} = e^{-2\pi}\cdot V_n \end{cases}$ より

$\{V_n\}$ は初項 $\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})$, 公比 $e^{-2\pi}$ の等比数列である.

$e^{2\pi} > 1$ より　$0 < e^{-2\pi} < 1$ だから

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} V_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})\{1-(e^{-2\pi})^n\}}{1-e^{-2\pi}}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{8}(1-e^{-2\pi})}{1-e^{-2\pi}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{8}}$$