$A+B+C=180^\circ$ より　$A+B=180^\circ-C$

よって $\sin(A+B)=\sin(180^\circ-C)$　より

$\sin(A+B)=\sin C$ となるので

①式は $\boxed{\sin A+\sin B=\sin C(\cos A+\cos B)}$ となる ―①′

ここで △ABC の外接円の半径を R とすると正弦定理より

$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$，$\sin C=\dfrac{c}{2R}$ がなりたち

余弦定理もつかうと ①′式は

$$\frac{a}{2R}+\frac{b}{2R}=\frac{c}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)$$ であるから

$$a+b=\cancel{c}\times\frac{a(b^2+c^2-a^2)+b(c^2+a^2-b^2)}{2ab\cancel{c}}$$

$$2ab(a+b)=a^2b+ab^2+ac^2+bc^2-a^3-b^3$$

$$2ab(a+b)=ab(a+b)+c^2(a+b)-(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

$$(a+b)c^2-(a+b)ab-(a+b)(a^2-ab+b^2)=0$$

$$(a+b)(c^2-ab-a^2+ab-b^2)=0$$

$$(a+b)(c^2-a^2-b^2)=0$$

$a+b\neq0$ より $c^2=a^2+b^2$ だから

$\boxed{C=90^\circ \text{の直角三角形となる}}$