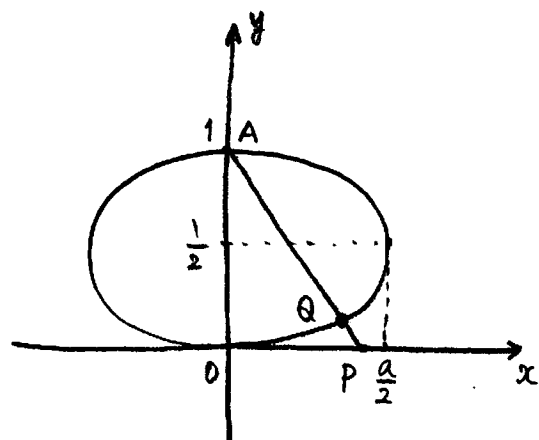




た円の式は

$$\frac{x^2}{(\frac{a}{2})^2} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{(\frac{1}{2})^2} = 1 \quad \text{より}$$

$$x^2 + a^2(y - \frac{1}{2})^2 = \frac{a^2}{4} \quad \text{--- ①}$$

時間 t のときの P の座標は $(vt, 0)$ より $t > 0$ の AP の式は

$$y = \frac{-1}{vt}(x - 0) + 1 \quad \text{より}$$

$$y = -\frac{x}{vt} + 1 \quad \text{--- ②}$$

②を①に代入して

$$x^2 + a^2\left(-\frac{x}{vt} + 1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \quad \text{より}$$

$$x^2 + a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{vt}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + a^2\left(\frac{1}{4} - \frac{x}{vt} + \frac{x^2}{v^2t^2}\right) = \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + \cancel{\frac{a^2}{4}} - \frac{a^2}{vt}x + \frac{a^2}{v^2t^2}x^2 = \cancel{\frac{a^2}{4}}$$

$$x \left\{ \left(1 + \frac{a^2}{v^2t^2}\right)x - \frac{a^2}{vt} \right\} = 0$$

$$x=0 \text{ 以外の解は } x = \frac{\frac{a^2}{vt}}{1 + \frac{a^2}{v^2t^2}} = \frac{a^2vt}{v^2t^2 + a^2}$$

$$\text{よって } A(0, 1), Q\left(\frac{a^2vt}{v^2t^2 + a^2}, -\frac{1}{vt} \times \frac{a^2vt}{v^2t^2 + a^2} + 1\right) \text{ であるから}$$

AQ の長さを $l(t)$ とすると

$$l(t) = \sqrt{\left(\frac{a^2vt}{v^2t^2 + a^2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{vt} \times \frac{a^2vt}{v^2t^2 + a^2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2vt}{v^2t^2 + a^2}\right)^2 \times \left(1 + \frac{1}{v^2t^2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a^2vt}{v^2t^2 + a^2}\right)^2 \times \frac{1}{v^2t^2} \times (v^2t^2 + 1)}$$

$$= \frac{a^2}{v^2t^2 + a^2} \sqrt{v^2t^2 + 1}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \frac{d}{dt} l(t) &= a^2 \times \left\{ -\frac{2v^2t}{(v^2t^2+a^2)^2} \left\{ \sqrt{v^2t^2+1} + \frac{a^2}{v^2t^2+a^2} \times \frac{2v^2t}{2\sqrt{v^2t^2+1}} \right\} \right. \\
 &= \frac{-2a^2v^2t\sqrt{v^2t^2+1}}{(v^2t^2+a^2)^2} + \frac{a^2v^2t}{(v^2t^2+a^2)\sqrt{v^2t^2+1}} \\
 &= \frac{a^2v^2t}{v^2t^2+a^2} \times \left\{ \frac{-2\sqrt{v^2t^2+1}}{v^2t^2+a^2} + \frac{1}{\sqrt{v^2t^2+1}} \right\} \\
 &= \frac{a^2v^2t}{v^2t^2+a^2} \times \left(\frac{-2(v^2t^2+1) + v^2t^2+a^2}{(v^2t^2+a^2)\sqrt{v^2t^2+1}} \right) \\
 &= \frac{-a^2v^2t \{ v^2t^2 - (a^2-2) \}}{(v^2t^2+a^2)^2 \sqrt{v^2t^2+1}}
 \end{aligned}$$

ゆえに $\frac{d}{dt} l(t) = 0$ とすると

i) $a > \sqrt{2}$ のとき

$$\frac{d}{dt} l(t) = \frac{-a^2v^2t(vt + \sqrt{a^2-2})(vt - \sqrt{a^2-2})}{(v^2t^2+a^2)^2 \sqrt{v^2t^2+1}} \quad \text{より}$$

$$t > 0 \text{ では } t = \frac{\sqrt{a^2-2}}{v}$$

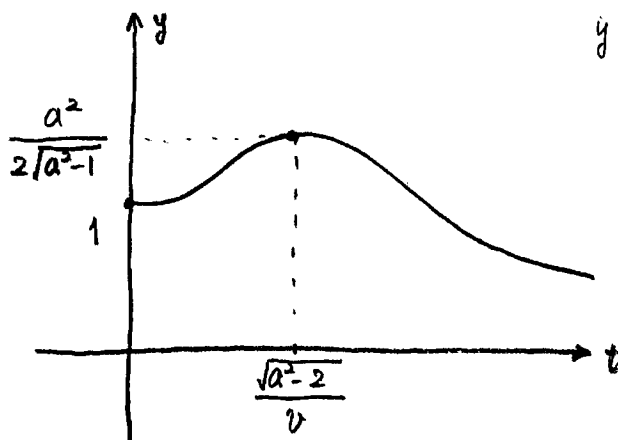
よって 増減表は下のようになる

t	0	...	$\frac{\sqrt{a^2-2}}{v}$	...
$\frac{d}{dt} l(t)$		+	0	-
$l(t)$	1	↗	$\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}}$	↘

$$l(0) = 1$$

$$\begin{aligned}
 l\left(\frac{\sqrt{a^2-2}}{v}\right) &= \frac{a^2}{v^2 \times \frac{a^2-2}{v^2} + a^2} \sqrt{v^2 \times \frac{a^2-2}{v^2} + 1} \\
 &= \frac{a^2}{2a^2-2} \sqrt{a^2-1} \\
 &= \frac{a^2\sqrt{a^2-1}}{2(a^2-1)} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2-1}}
 \end{aligned}$$

ゆえに グラフの概形は下のようになる



$$y = \frac{a^2}{v^2t^2+a^2} \sqrt{v^2t^2+1}$$

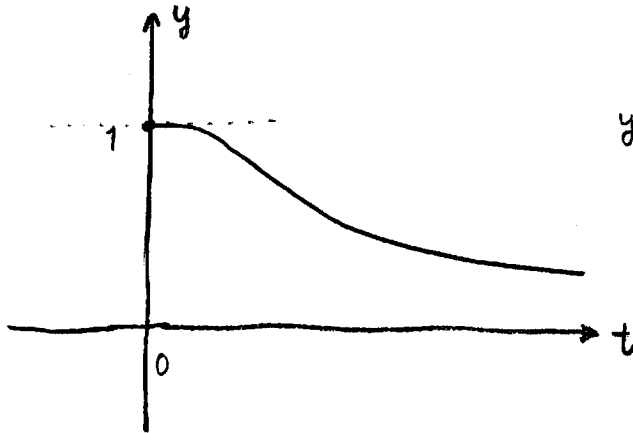
$$\left(\lim_{t \rightarrow \infty} l(t) = 0 \right)$$

ii) $a = \sqrt{2}$ のとき

$$\frac{d}{dt} l(t) = \frac{-2v^4 t^3}{(v^2 t^2 + 2)^2 \sqrt{v^2 t^2 + 1}} \quad \text{より}$$

$$t > 0 \text{ では } \frac{d}{dt} l(t) < 0 \quad (t=0 \text{ では } \frac{d}{dt} l(t) = 0)$$

よって グラフは単調減少で概形は下図



$$y = \frac{a^2}{v^2 t^2 + a^2} \sqrt{v^2 t^2 + 1}$$

$$\left(y = \frac{2}{v^2 t^2 + 2} \sqrt{v^2 t^2 + 1} \right)$$

iii) $1 < a < \sqrt{2}$ のとき

$$\frac{d}{dt} l(t) = \frac{-a^2 v^2 t \{ v^2 t^2 + (2 - a^2) \}}{(v^2 t^2 + a^2)^2 \sqrt{v^2 t^2 + 1}} \quad \text{より}$$

$$t > 0 \text{ では } \frac{d}{dt} l(t) < 0 \quad (t=0 \text{ では } \frac{d}{dt} l(t) = 0)$$

よって グラフは単調減少で ii) と同様の概形になる。