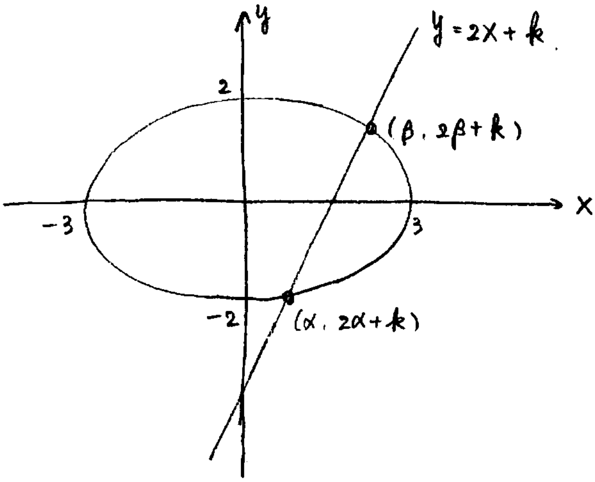
$4x^2+9y^2=36$

$\iff \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1.$



(1) $y=2x+k$ を $4x^2+9y^2=36$ に代入して

$4x^2+9(2x+k)^2=36$

$\boxed{40x^2+36kx+9k^2-36=0}$ —①

これが異なる2つの実数解をもつから

$\dfrac{D}{4}=18^2k^2-40(9k^2-36)>0$

$2\times18k^2-40(k^2-4)>0$

$9k^2-10(k^2-4)>0$

$-k^2+40>0$

$\therefore \boxed{-2\sqrt{10}<k<2\sqrt{10}}$

(2) 2つの交点を $(\alpha, 2\alpha+k)$, $(\beta, 2\beta+k)$ とすると

$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+((2\beta+k)-(2\alpha+k))^2}=4$ より

$5(\beta-\alpha)^2=16$

$5\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=16$

①の解が α, β より $\alpha+\beta=-\dfrac{36}{40}k=-\dfrac{9}{10}k$

$\alpha\beta=\dfrac{9k^2-36}{40}$ だから

$5\left\{\dfrac{81}{100}k^2-\cancel{4}\times\dfrac{9k^2-36}{\cancel{40}\,10}\right\}=16$

$5\times\dfrac{81k^2-90k^2+360}{100}=16$

$-9k^2+360=320$

$9k^2-40=0$

$k^2=\dfrac{40}{9}$

$\therefore \boxed{k=\pm\dfrac{2\sqrt{10}}{3}}$