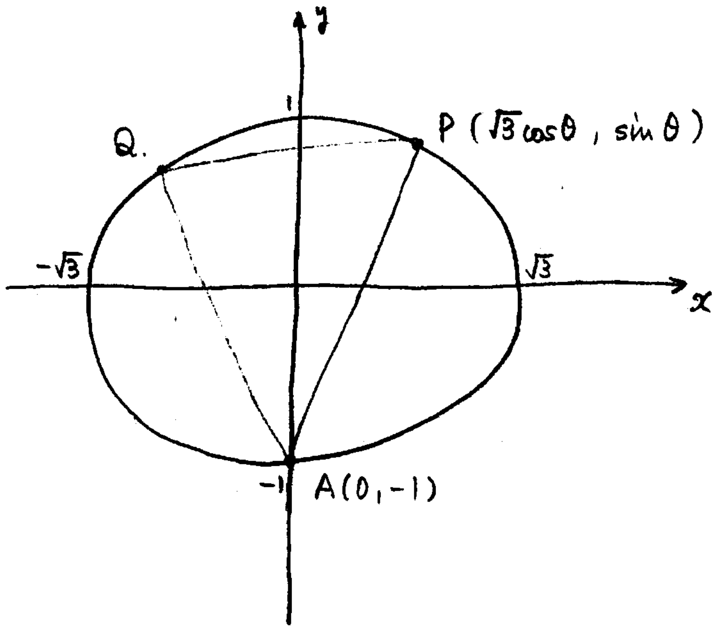

(1)　Pは ($\sqrt{3}\cos\theta$, $\sin\theta$) とおけるから

$$\begin{aligned}AP^2 &= (\sqrt{3}\cos\theta)^2 + (\sin\theta+1)^2\\ &= 3\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1\\ &= 3(1-\sin^2\theta) + \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1\\ &= -2\sin^2\theta + 2\sin\theta + 4\\ &= -2\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 4 + \frac{1}{2}\\ &= -2\left(\sin\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{2}\end{aligned}$$

よって AP^2 が最大のとき AP も最大となるから

$\sin\theta = \frac{1}{2}$ のとき、即ち $\theta = 30^\circ$ のとき、

APの長さは最大で $\sqrt{\frac{9}{2}} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ となる

このとき、Pの座標は $(\sqrt{3}\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = \left(\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \boxed{\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ となる

(2)　直線APの式は

$$y = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{3}{2}-0}(x-0) - 1 \quad より \quad y = x - 1$$

これと Q ($\sqrt{3}\cos\theta_1$, $\sin\theta_1$) との距離を l とすると

$$\begin{aligned}l = \frac{|\sqrt{3}\cos\theta_1 - \sin\theta_1 - 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\sin\theta_1 - \sqrt{3}\cos\theta_1 + 1\right|\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left|2\sin(\theta_1 - 60^\circ) + 1\right|\end{aligned}$$

よって l の最大値は $\theta_1 - 60^\circ = 90^\circ$ のとき、即ち $\theta_1 = 150^\circ$ のときで

$$l = \frac{1}{\sqrt{2}}|2\times 1 + 1| = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

このときのQの座標は $(\sqrt{3}\cos 150^\circ, \sin 150^\circ) = \left(\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \frac{1}{2}\right) = \boxed{\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)}$ のときで

△APQの面積の最大値は

$$\frac{1}{2}\times l_{max} \times AP_{max} = \frac{1}{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\frac{3\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{9}{4}}$$