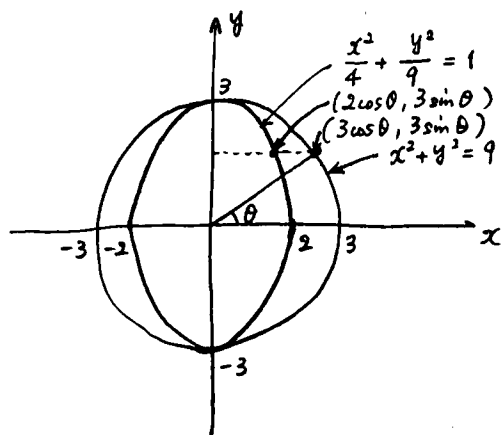




た円上の点Pは $(2\cos\theta, 3\sin\theta)$ とおける。 $0 \leq \theta < 2\pi$

$$\begin{aligned}
 & 3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 \\
 &= 3 \cdot 4\cos^2\theta + \sqrt{3} \cdot 2\cos\theta \cdot 3\sin\theta + 2 \cdot 9\sin^2\theta \\
 &= 12\cos^2\theta + 6\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta + 18\sin^2\theta \\
 &= 12 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 3\sqrt{3}\sin 2\theta + 18 \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\
 &= 3\sqrt{3}\sin 2\theta - 3\cos 2\theta + 15 \\
 &= 3 \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\cos 2\theta \right) + 15 \\
 &= 6\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) + 15
 \end{aligned}$$

∴ $-\frac{\pi}{6} \leq 2\theta - \frac{\pi}{6} < \frac{23}{6}\pi$ と考へる。

i) $2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi$ のとき

即ち $2\theta = \frac{4}{6}\pi, \frac{16}{6}\pi$ より

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\pi$ のとき $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ となり

$3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 = 6 \times 1 + 15 = 21$ が最大値となる

$\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき P は $(2\cos\frac{\pi}{3}, 3\sin\frac{\pi}{3}) = (1, \frac{3\sqrt{3}}{2})$

$\theta = \frac{4}{3}\pi$ のとき P は $(2\cos\frac{4}{3}\pi, 3\sin\frac{4}{3}\pi) = (-1, -\frac{3\sqrt{3}}{2})$

ii) $2\theta - \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi$ のとき

即ち $2\theta = \frac{10}{6}\pi, \frac{22}{6}\pi$ より

$\theta = \frac{5}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ のとき $\sin\left(2\theta - \frac{\pi}{6}\right) = -1$ となり

$3x^2 + \sqrt{3}xy + 2y^2 = 6 \times (-1) + 15 = 9$ が最小値となる

$\theta = \frac{5}{6}\pi$ のとき P は $(2\cos\frac{5}{6}\pi, 3\sin\frac{5}{6}\pi) = (-\sqrt{3}, \frac{3}{2})$

$\theta = \frac{11}{6}\pi$ のとき P は $(2\cos\frac{11}{6}\pi, 3\sin\frac{11}{6}\pi) = (\sqrt{3}, -\frac{3}{2})$

ゆえに 最大値 21 (P(1, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$) または P(-1, $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$) のとき)

最小値 9 (P(- $\sqrt{3}$, $\frac{3}{2}$) または P($\sqrt{3}$, $-\frac{3}{2}$) のとき)

となる