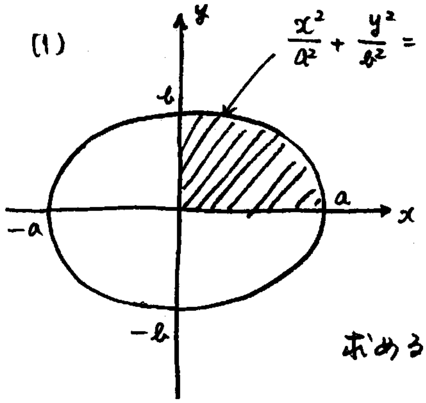
(1)



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ は x軸，y軸に関して対称より

$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の部分の面積を求めて4倍すればよい

$y^2 = b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ より　$b>0$ から

$y = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$　だから

求めるだ円の面積を S_1 とすると

$S_1 = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$　である．

ここで $\frac{x}{a} = \sin\theta$ とおくと

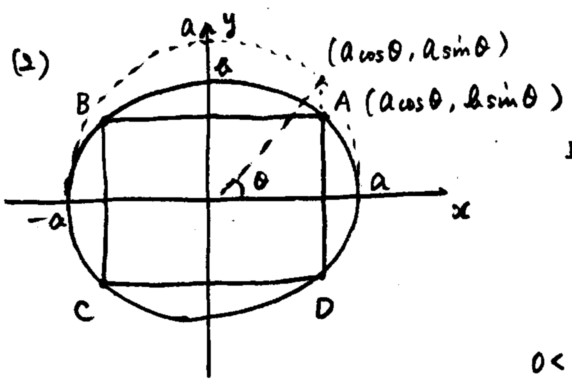
$\frac{1}{a}\cdot dx = \cos\theta\cdot d\theta$ ，

x	$0 \cdots\cdots a$
θ	$0 \cdots\cdots \frac{\pi}{2}$

より

$$S_1 = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot a\cos\theta\,d\theta$$
$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ba\cos^2\theta\,d\theta$$
$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$
$$= 4ab\left[\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= 4ab\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\pi ab}_{(ア)}$$

(2)



だ円上の第1象限の点Aは

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおけるから

長方形ABCDの面積Sは

$$S = 2a\cos\theta\cdot 2b\sin\theta$$
$$= 2ab\sin 2\theta \quad \text{であり}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より　$0<2\theta<\pi$ で考えるので

$2\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき，即ち $\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき

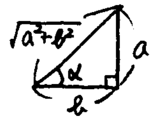
$S = 2ab\times 1 = \boxed{2ab}_{(イ)}$ で最大値となる．

このとき $\boxed{\text{Aは}}$ $\left(a\cos\frac{\pi}{4},\ b\sin\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{\sqrt{2}}{2}b\right)}$ となる

(ウ)　(エ)

(3)　長方形ABCDの周の長さsは

$$s = 4a\cos\theta + 4b\sin\theta$$
$$= 4\sqrt{a^2+b^2}\ \sin(\theta+\alpha)$$



$$\left(\text{但し、}\ \cos\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \sin\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$ とできるから

$\theta+\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき $\boxed{s\text{ は最大値 } 4\sqrt{a^2+b^2} \text{ をとる}}$
(オ)

このとき A は $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$

$$= \left(a\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right),\ b\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right)$$
$$= (a\sin\alpha,\ b\cos\alpha)$$
$$= \boxed{\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}$$ となる

(カ)　(キ)

(4)　長方形ABCDをy軸まわりに回転させてできる円柱の体積 V は

$$V = \pi(a\cos\theta)^2 \times 2b\sin\theta$$
$$= 2\pi a^2 b\ \sin\theta\cos^2\theta$$
$$= 2\pi a^2 b\ \sin\theta\,(1-\sin^2\theta)$$ である。

ここで $\sin\theta = t$ とおくと $V = 2\pi a^2 b\,(-t^3+t)$　$(0<t<1)$
であるから

$$\frac{dV}{dt} = 2\pi a^2 b\,(-3t^2+1)$$
$$= -6\pi a^2 b\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$ より

Vの増減表は以下のようになる よって、$t = \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で V は最大となり

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$\frac{dV}{dt}$		+	0	−	
V		↗	最大	↘	

その値は $V = 2\pi a^2 b\left(-\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$$= 2\pi a^2 b\left(-\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{3\sqrt{3}}{9}\right)$$
$$= \boxed{\frac{4\sqrt{3}\pi a^2 b}{9}}$$ (ケ) となる

このとき $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ より

A は $(a\cos\theta,\ b\sin\theta) = \boxed{\left(\frac{\sqrt{6}}{3}a,\ \frac{\sqrt{3}}{3}b\right)}$ となる

(サ)　(コ)