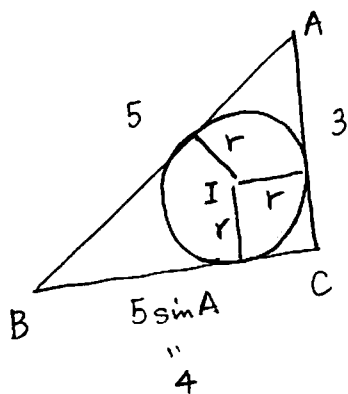




(1) 余弦定理より

$$(5 \sin A)^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \cos A$$

$$25(1 - \cos^2 A) = 25 + 9 - 30 \cos A$$

$$25 \cos^2 A - 30 \cos A + 9 = 0$$

$$(5 \cos A - 3)^2 = 0$$

$$\therefore \cos A = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} 0 < A < 180^\circ \text{より } \sin A \text{ は正だから } \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ &= \sqrt{1 - \frac{9}{25}} \\ &= \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\therefore BC = 5 \sin A = 5 \times \frac{4}{5} = \boxed{4}$$

(2) $\triangle ABC$ は $5^2 = 4^2 + 3^2$ より AB を斜辺とする直角三角形だから

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

また内接円の半径を r 、内接円の中心を I とすると

$$\triangle IAB + \triangle IBC + \triangle ICA = \triangle ABC \quad \text{よって}$$

$$\frac{1}{2} \times 5r + \frac{1}{2} \times 4r + \frac{1}{2} \times 3r = 6 \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{2} (5 + 4 + 3)r = 6$$

$$6r = 6$$

$$r = 1$$

よって $\triangle ABC$ の内接円の半径は 1 である