(1) $(x, y) = (t\cos t, t\sin t)$ より

$$\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \left(1\times\cos t + t\times(-\sin t),\ 1\times\sin t + t\times\cos t\right)$$

$$= \boxed{(\cos t - t\sin t,\ \sin t + t\cos t)}$$

(2) x軸との交点より $y=0$であるから

$t\sin t = 0$ で $t>0$より $\sin t = 0$

これをみたすtは $t = l\pi$ $(l = 1, 2, 3, \cdots)$. であるが

lが奇数のときは $x = t\cos t$

$= l\pi\cos l\pi = -l\pi < 0$ となるので不適

よって $t = 2k\pi$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$ のとき 題意をみたすので

P_k $(2k\pi\cos 2k\pi,\ 2k\pi\sin 2k\pi) = (2k\pi, 0)$ であり.

そのときのP_kにおける接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t\cos t}{\cos t - t\sin t}$$ より $t = 2k\pi$を代入して

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2k\pi + 2k\pi\cos 2k\pi}{\cos 2k\pi - 2k\pi\sin 2k\pi}$$

$$= \frac{0 + 2k\pi\times 1}{1 - 2k\pi\times 0} = 2k\pi$$ であるから.

接線L_kの方程式は $(2k\pi, 0)$ を通り, 傾き$2k\pi$より

$y - 0 = 2k\pi(x - 2k\pi)$ より

$$\boxed{y = 2k\pi(x - 2k\pi)}$$

(3) L_k : $y = 2k\pi x - 4k^2\pi^2$ — ①

L_{k+1} : $y = 2(k+1)\pi x - 4(k+1)^2\pi^2$ ② より

②-①から $2\pi x\{(k+1) - k\} - 4\pi^2\{(k+1)^2 - k^2\} = 0$

よって $2\pi x - 4\pi^2(2k+1) = 0.$

$x = 2\pi(2k+1)$ — ③

これを①に代入すると $y = 2k\pi\cdot 2\pi(2k+1) - 4k^2\pi^2$

$y = 8k^2\pi^2 + 4k\pi^2 - 4k^2\pi^2$

$y = 4k^2\pi^2 + 4k\pi^2$.

$y = 4k\pi^2(k+1)$ — ④

③より $x^2 = 4\pi^2(2k+1)^2$ から

$x^2 = 4\pi^2(4k^2+4k+1)$

$x^2 = 4\pi^2(4k^2+4k) + 4\pi^2$

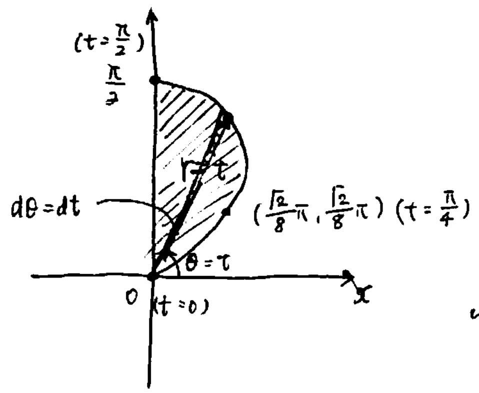
よって $4k^2+4k = \dfrac{x^2-4\pi^2}{4\pi^2}$

また ④より $y = \pi^2(4k^2+4k)$ だから.

$y = \pi^2 \times \dfrac{x^2-4\pi^2}{4\pi^2}$

$y = \dfrac{x^2-4\pi^2}{4}$ よって $y = \dfrac{x^2}{4} - \pi^2$ となって $\boxed{Q_k \text{は放物線} \; y = \dfrac{x^2}{4} - \pi^2 \; \text{上にある}}$

(4) $(x, y) = (t\cos t, t\sin t)$ より



原点からの距離を r とすると

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$= \sqrt{(t\cos t)^2 + (t\sin t)^2}$

$= \sqrt{t^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = t$

ゆえに 求める面積 を S とすると

$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r\theta \, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \times t^2 dt$

$= \left[\frac{t^3}{6}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\dfrac{\pi^3}{48}}$