

$$(a+b):(b+c):(c+a) = 9:11:10 \text{ より } k \text{ を正の数として}$$

$$\begin{cases} a+b=9k & \text{--- ①} \\ b+c=11k & \text{--- ②} \\ c+a=10k & \text{--- ③} \end{cases} \quad \text{のなりたつ}$$

$$\text{これらを辺々たすと } 2(a+b+c) = 30k \text{ より}$$

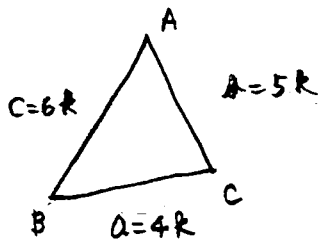
$$a+b+c = 15k \text{ --- ④}$$

$$\text{よって ④}-\text{①より } c = 6k$$

$$\text{④}-\text{②より } a = 4k$$

$$\text{④}-\text{③より } b = 5k \text{ となる } \quad \text{ゆえに } \boxed{a:b:c = 4:5:6}$$

となる



また
余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{(6k)^2 + (5k)^2 - (4k)^2}{2 \times 6k \times 5k} \\ &= \frac{(36 + 25 - 16)k^2}{60k^2} = \frac{45}{60} = \boxed{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$\text{また } \triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 135\sqrt{7} \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} \times 6k \cdot 5k \times \sqrt{1 - \frac{9}{16}} = 135\sqrt{7}$$

$$15k^2 \times \frac{\sqrt{7}}{4} = 135\sqrt{7}$$

$$k^2 = \frac{4 \times 135}{15}$$

$$k^2 = 36$$

$$k > 0 \text{ より } k = 6$$

$$\text{ゆえに } \boxed{a} = 4k = \boxed{24} \text{ である}$$