

群 ① ② ③ ④ ⑤

$$\frac{1}{2}, \left| \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right|, \left| \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4} \right|, \left| \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right|, \left| \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \dots \right|$$

(1) 上のように 分母によって 群に分けると、第 n 群には n 個の項がある

$\frac{37}{50}$ は 第49群の 37番目となるので

$$(1+2+3+\dots+48) + 37$$

$$= \frac{48 \cdot (48+1)}{2} + 37$$

$$= 24 \times 49 + 37$$

$$= 1213$$

よって $\frac{37}{50}$ は 第1213項となる

(2) 第1000項が 第 k 群に入っているとすると

$$1+2+3+\dots+(k-1) < 1000 \leq 1+2+3+\dots+k \quad \text{より}$$

$$\frac{(k-1) \cdot k}{2} < 1000 \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

$$k(k-1) < 2000 \leq k(k+1) \quad \dots ① \quad \text{かゝる } k \text{ はない。}$$

$$\sqrt{2000} = 20\sqrt{5} \approx 44 \text{ より}$$

$$k=44 \text{ のとき } k(k-1) = 44 \times 43 = 1892$$

$$k(k+1) = 44 \times 45 = 1980$$

$$k=45 \text{ のとき } k(k-1) = 45 \times 44 = 1980$$

$$k(k+1) = 45 \times 46 = 2070$$

よって $k=45$ で ① をみたすので 第45群であり

$$\text{第44群までで } \frac{44 \times 45}{2} = \frac{1980}{2} = 990 \text{ (項) あるので}$$

第1000項は 第45群の 10項目となるので、その数は

$$\boxed{\frac{10}{46}}$$

(3) 第 k 群の総和は $\frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+1} + \frac{3}{k+1} + \dots + \frac{k}{k+1}$

$$= \frac{1}{k+1} \times \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k}{2} \quad \text{となるから}$$

初項から第1000項までの和は 第44群までのすべての総和と第45群のはじめの10項の和をたせばよいので

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{44}{2} \right) + \left(\frac{1}{46} + \frac{2}{46} + \frac{3}{46} + \dots + \frac{10}{46} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{44 \times 45}{2} + \frac{1}{46} \times \frac{10 \times 11}{2}$$

$$= 11 \times 45 + \frac{55}{46}$$

$$= 495 + \frac{55}{46} = \frac{495 \times 46 + 55}{46} = \boxed{\frac{22825}{46}}$$

$$\begin{array}{r} 495 \\ \times 46 \\ \hline 2970 \\ 1980 \\ \hline 22820 \end{array}$$