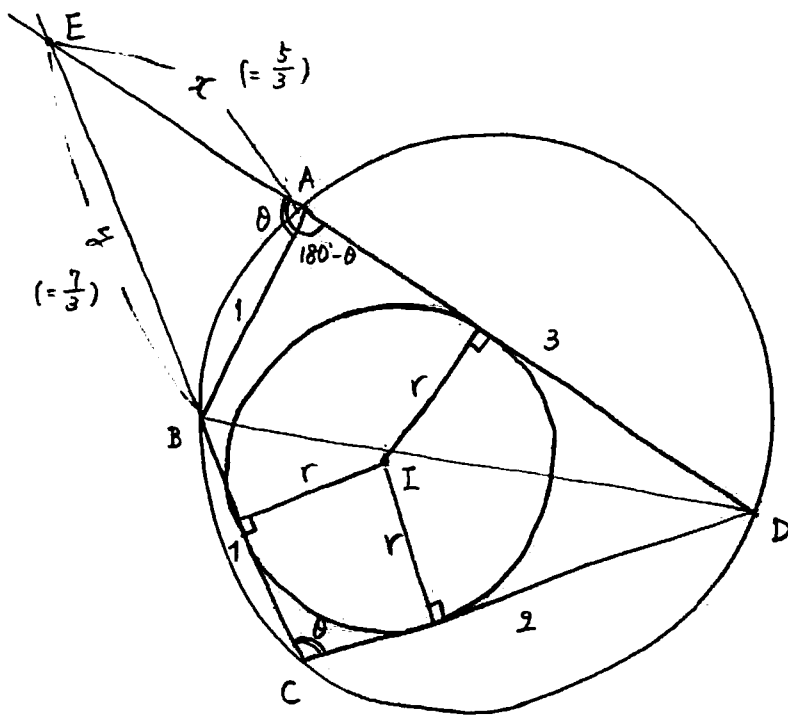




(1) $\angle BCD = \theta$ とおくと

$\angle BAD = 180^\circ - \theta$ より

$\cos \theta = -\cos(180^\circ - \theta)$ であり、

余弦定理から

$$BD^2 = 1^2 + 3^2 - 2 \times 1 \times 3 \times \cos(180^\circ - \theta) \quad \text{--- ①}$$

$$BD^2 = 1^2 + 2^2 - 2 \times 1 \times 2 \times \cos \theta \quad \text{--- ②}$$

かゝりたつ

①②より

$$1 + 9 - 6 \times (-\cos \theta) = 1 + 4 - 4 \cos \theta \quad \text{だから}$$

$$10 \cos \theta = 5 - 10$$

$$\cos \theta = -\frac{1}{2}$$

よって $\angle BCD = 120^\circ$ であり、

$$\text{②より } BD^2 = 1 + 4 - 4 \times (-\frac{1}{2}) = 7 \text{ より } BD = \sqrt{7} \text{ となる}$$

(2) (四角形 ABCD) = $\triangle ABD + \triangle BCD$

$$= \frac{1}{2} \times 1 \times 3 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$$

(3) 正弦定理より、円Oの半径をRとすると

$$2R = \frac{BD}{\sin \angle BCD} \text{ より } R = \frac{\sqrt{7}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\text{よって 円Oの面積は } \pi R^2 = \frac{7\pi}{3}$$

(4) 求める円の中心をI、半径をrとする。また直線BCとADの交点をEとすると

$\triangle EAB$ と $\triangle ECD$ であり、相似比は1:2である。

また $EA = x$, $EB = y$ とおくと $x : y + 1 = 1 : 2$ より

$$y + 1 = 2x \quad \text{--- ③}$$

また $y : x + 3 = 1 : 2$ より $2y = x + 3$

$$\text{よって } x = 2y - 3 \quad \text{--- ④}$$

④を③に代入して $y + 1 = 2(2y - 3)$ から

$$y - 4y = -1 - 6$$

$$-3y = -7$$

$$y = \frac{7}{3}$$

$$\text{④より } x = \frac{14}{3} - \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$$

$$5.7 \quad \triangle ECD = \triangle IEC + \triangle ICD + \triangle IDE \text{ から}$$

$$\frac{1}{2} EC \cdot CD \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} EC \cdot r + \frac{1}{2} CD \cdot r + \frac{1}{2} DE \cdot r \quad \text{より}$$

$$\frac{10}{3} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{10}{3} + 2 + \frac{14}{3} \right) r$$

$$\frac{10\sqrt{3}}{3} = \frac{10+6+14}{3} r$$

$$\text{よって} \quad r = \frac{\cancel{2}}{\cancel{30}} \times \frac{10\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{より}$$

$$\text{求める円の面積は} \quad \pi r^2 = \pi \times \frac{3}{9} = \boxed{\frac{\pi}{3}}$$