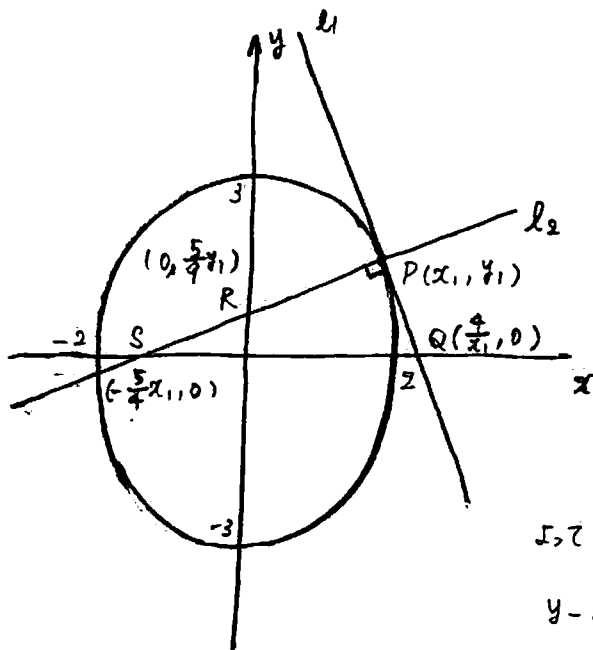




$$(1) \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ の両辺 } x \text{ で微分すると}$$

$$\frac{x}{2} + \frac{2}{9}y \cdot y' = 0 \text{ より}$$

$$\frac{2}{9}y \cdot y' = -\frac{x}{2}$$

$$y \neq 0 \text{ のとき } y' = -\frac{x}{2} \times \frac{9}{2y} = -\frac{9x}{4y}$$

よって $P(x_1, y_1)$ における接線 l_1 は

$$y - y_1 = -\frac{9x_1}{4y_1}(x - x_1) \text{ より}$$

$$4y_1(y - y_1) + 9x_1(x - x_1) = 0$$

$$4y_1y + 9x_1x = 9x_1^2 + 4y_1^2$$

ここで (x_1, y_1) は円上より $\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1$ かつ $9x_1^2 + 4y_1^2 = 36$ である

$$\text{ゆえに 接線 } l_1 \text{ は } \boxed{9x_1x + 4y_1y = 36} \quad \text{--- ①}$$

また 接線 l_2 は $y - y_1 = \frac{4y_1}{9x_1}(x - x_1)$ より

$$9x_1(y - y_1) - 4y_1(x - x_1) = 0$$

$$-4y_1x + 9x_1y = -4x_1y_1 + 9x_1y_1$$

$$\text{よって 接線 } l_2 \text{ は } \boxed{4y_1x - 9x_1y = -5x_1y_1} \quad \text{--- ②}$$

$$(2) \text{ ①について ①に } y=0 \text{ 代入して } 9x_1x = 36 \text{ より } x = \frac{4}{x_1}$$

$$\text{よって } Q \text{ は } \left(\frac{4}{x_1}, 0\right)$$

$$\text{②について ②に } y=0 \text{ 代入して } 4y_1x = -5x_1y_1 \text{ より } x = -\frac{5x_1}{4}$$

$$\text{よって } S \text{ は } \left(-\frac{5}{4}x_1, 0\right)$$

$$\text{②について ②に } x=0 \text{ 代入して } -9x_1y = -5x_1y_1 \text{ より } y = \frac{5y_1}{9}$$

$$\text{よって } R \text{ は } \left(0, \frac{5}{9}y_1\right)$$

ゆえに $x_1 > 0$ より

$$SQ = \frac{4}{x_1} - \left(-\frac{5}{4}x_1\right) = \frac{4}{x_1} + \frac{5}{4}x_1 \geq 2\sqrt{\frac{4}{x_1} \cdot \frac{5}{4}x_1} = 2\sqrt{5}$$

よって SQ の最小値は $2\sqrt{5}$ で $\frac{4}{x_1} = \frac{5}{4}x_1$ のときであるから

$$x_1^2 = \frac{16}{5} \text{ より } \boxed{x_1 = \frac{4}{\sqrt{5}}}$$

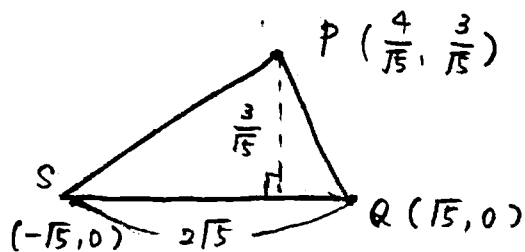
$$\text{このとき } \frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1 \text{ より}$$

$$\frac{\frac{16}{5}}{4} + \frac{y_1^2}{9} = 1$$

$$\frac{y_1^2}{9} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{y_1^2}{9} = \frac{1}{5} \text{ より}$$

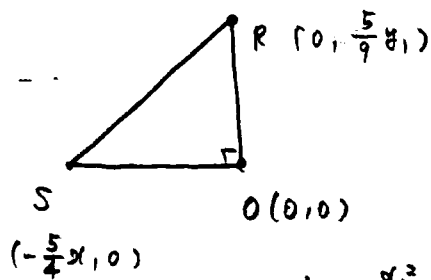
$$\boxed{y_1 = \frac{3}{\sqrt{5}}}$$



$$\therefore \triangle PSQ = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{5} \times \frac{3}{\sqrt{5}} = \boxed{3}$$

とある。

(3)



$$\triangle OSR = \frac{1}{2} \times \frac{5}{4} x \cdot \frac{5}{9} y$$

$$= \frac{25}{72} xy$$

$$\therefore xy = \frac{72}{25} \triangle OSR$$

③

$$\therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}xy = 1 \quad \text{より} \quad \text{相加相乗平均の関係から}$$

$$\left\{2\sqrt{\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3}}\right\}^2 - \frac{1}{3}xy \geq 1$$

$$\frac{2}{3}xy - \frac{1}{3}xy \geq 1$$

$$\frac{1}{3}xy \geq 1$$

$$\textcircled{3} \text{より} \frac{1}{3} \times \frac{24}{25} \triangle OSR \geq 1$$

$$\frac{24}{25} \triangle OSR \geq 1$$

$$\therefore \triangle OSR \geq \frac{25}{24} \quad \text{より}$$

$\triangle OSR$ の面積の最小値は $\frac{25}{24}$ である

$$\left(\frac{x}{2} = \frac{y}{3}\right) \text{ のときであるので } (x, y) = \left(\sqrt{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \text{ のときである}$$