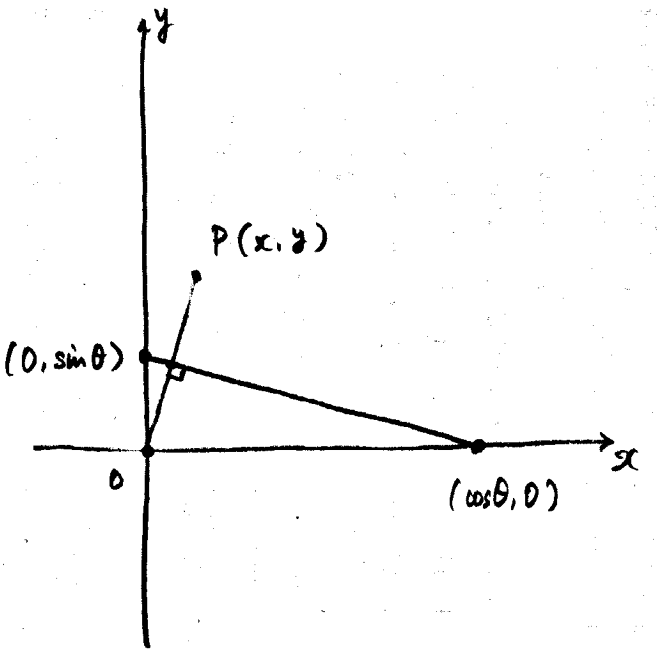


(1) $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で考えると.

2点を通る直線は

$\frac{x}{\cos\theta} + \frac{y}{\sin\theta} = 1$ — ①である

また Pを (x, y) とすると

OPの中点 $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}\right)$ は ①上にあるから.

$\frac{x}{2\cos\theta} + \frac{y}{2\sin\theta} = 1$ がなりたつ. — ②

また(①の傾き) ⊥ (OPの傾き)より

$\frac{-\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{y}{x} = -1$ がなりたつ — ③

②より $x\sin\theta + y\cos\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ —②'

③より $x\cos\theta - y\sin\theta = 0$ —③'

②'$\times\cos\theta$ → $x\sin\theta\cos\theta + y\cos^2\theta = 2\sin\theta\cos^2\theta$

③'$\times\sin\theta$ → $-)\ x\sin\theta\cos\theta - y\sin^2\theta = 0$

辺々ひいて $y(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2\sin\theta\cos^2\theta$ より

$\boxed{y = 2\sin\theta\cos^2\theta}$

これを③'に代入して $x\cos\theta = 2\sin^2\theta\cos^2\theta$ より

$\boxed{x = 2\sin^2\theta\cos\theta}$

$\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ のときは 0の対称点Pは存在しないが $(0, 0)$ に収束する.

ゆえに $\boxed{\text{Pは } (x, y) = (2\sin^2\theta\cos\theta,\ 2\sin\theta\cos^2\theta)}$

(2) $\begin{cases} x = 2\sin^2\theta\cos\theta \\ y = 2\sin\theta\cos^2\theta \end{cases}$ より

$\frac{dx}{d\theta} = 2\{2\sin\theta\cos^2\theta + \sin^2\theta \times (-\sin\theta)\}$

$= 2\sin\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

よって $y \cdot \frac{dx}{d\theta} = 4\sin^2\theta\cos^2\theta(2\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= \sin^2 2\theta \cdot \left(2 \times \frac{1+\cos 2\theta}{2} - \frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)$

$= \sin^2 2\theta\left(1 + \cos 2\theta - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta\right)$

$= \sin^2 2\theta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2\theta\right)$

$= \boxed{\frac{1}{2}\sin^2 2\theta(3\cos 2\theta + 1)}$

(3) $\begin{cases} x(\theta) = 2\sin^2\theta\cos\theta \\ y(\theta) = 2\sin\theta\cos^2\theta \end{cases}$ とおくと $\begin{cases} \sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta \\ \cos(\frac{\pi}{2}-\theta) = \sin\theta \end{cases}$ をつかうと

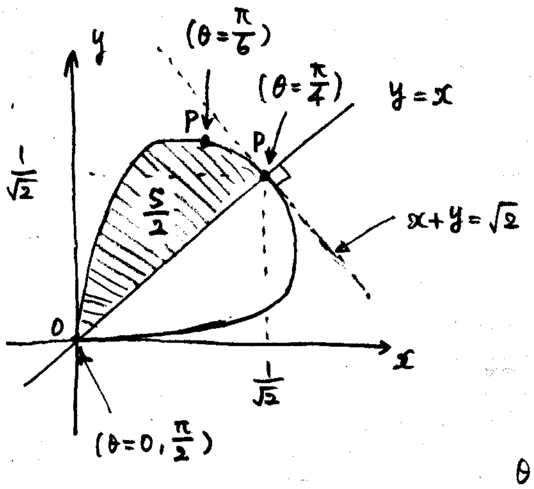
$$x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$= 2\cos^2\theta\sin\theta$$
$$= y(\theta)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$= 2\cos\theta\sin^2\theta$$
$$= x(\theta)$$

よって $\left(x(\theta), y(\theta)\right) = \left(y(\frac{\pi}{2}-\theta), x(\frac{\pi}{2}-\theta)\right)$

となって $\boxed{\text{x, y 座標が } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ を基準にして入れかわるので } P(x(\theta), y(\theta)) \text{ は } y = x \text{ に関して対称である}}$

(4)



$x(\frac{\pi}{4}) = y(\frac{\pi}{4}) = 2\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ であり,

$y=x$ 対称であり,

x, y はすべての θ で微分可能であることを考えると 左の図のようになる

$$x\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin^2\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6} = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos^2\frac{\pi}{6} = 2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \text{ より}$$

$x(\frac{\pi}{6}) < y(\frac{\pi}{6})$ となるから

$\theta = \frac{\pi}{6}$ のときの P 点は $y \geqq x$ の部分にあるから

$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{4}$ のときの P は $y \geqq x$ の部分にある.

よって求める面積を S とすると 図の斜線部は $\frac{S}{2}$ であるので

より

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} y \cdot dx - \frac{1}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$$ である ここで (2) をつかうと

x	$0 \cdots\cdots \frac{1}{\sqrt{2}}$
θ	$0 \cdots\cdots \frac{\pi}{4}$

より

$$\frac{S}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}\sin^2 2\theta(3\cos 2\theta + 1)\,d\theta - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta\cdot\cos 2\theta\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 2\theta\,d\theta - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{2}\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\sin^3 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\cos 4\theta}{2}\,d\theta - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{3}{2}\times\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{4}\sin 4\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\times\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}$$
$$= \frac{\pi}{16}$$

ゆえに $S = \frac{\pi}{8}$ より $\boxed{\text{求める面積は } \frac{\pi}{8} \text{ である}}$