

$$P(x) = x^3 + (a-1)x^2 - (a+2)x - 6a+8 \quad \text{において}$$

(1) $P(x)$ を $x-3$ でわった余りは

$$\begin{aligned} P(3) &= 27 + 9(a-1) - 3(a+2) - 6a+8 \\ &= 27 + 9a - 9 - 3a - 6 - 6a + 8 \\ &= \boxed{20} \\ &\quad \text{P1.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{また } P(-2) &= -8 + 4(a-1) + 2(a+2) - 6a+8 \\ &= 4a + 2a - 6a - 8 - 4 + 4 + 8 = 0 \text{ より} \end{aligned}$$

$$P(x) = 0 \text{ は } x = \boxed{-2} \text{ を解にもつ。}$$

ウエ

$$\text{よって } P(x) = (x + \boxed{2}) \left\{ x^2 + (a - \boxed{3})x - \boxed{3}a + \boxed{4} \right\}$$

オ カ キ ク

1	$a-1$	$-a-2$	$-6a+8$	$\underline{-2}$
	-2	$-2a+6$	$6a-8$	
1	$a-3$	$-3a+4$	0	

(2) $P(x) = 0$ の解がすべて実数のとき

$$x^2 + (a-3)x - 3a+4 = 0 \text{ が実数解をもつから}$$

この判別式をDとすると

$$D = (a-3)^2 - 4 \times 1 \times (-3a+4) \geq 0 \text{ より}$$

$$a^2 - 6a + 9 + 12a - 16 \geq 0$$

$$a^2 + 6a - 7 \geq 0$$

$$(a+7)(a-1) \geq 0$$

$$\text{よって } a \leq \boxed{-7}, \boxed{1} \leq a \text{ である}$$

ケ コ サ

また、異なる3実数解がちょうど2個となるときは

$$D = 0 \text{ のときをとくと } a = -7, 1 \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} a = -7 \text{ のとき } P(x) &= (x+2)(x^2 - 10x + 25) \\ &= (x+2)(x-5)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a = 1 \text{ のとき } P(x) &= (x+2)(x^2 - 2x + 1) \\ &= (x+2)(x-1)^2 \text{ で題意をみたす。} \end{aligned}$$

また $x^2 + (a-3)x - 3a+4 = 0$ の解が -2 をもつときは

$$4 - 2(a-3) - 3a+4 = 0 \text{ より}$$

$$-5a + 14 = 0 \quad \text{よって } a = \boxed{\frac{14}{5}} \text{ シエ}$$

$$\text{このとき } P(x) = (x+2)\left(x^2 - \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}(x+2)(5x^2 - x - 22)$$

$$= \frac{1}{5}(x+2)^2(5x-11) \text{ で題意をみたす}$$

$$\frac{5}{1} \times \frac{-11}{2}$$

(3) $-7 < a < 1$ ならば $p(x) = 0$ は虚数解をもち、

その解 α, β は $x^2 + (a-3)x - 3a+4 = 0$ の解だから

解と係数の関係より $\begin{cases} \alpha + \beta = -a+3 \\ \alpha\beta = -3a+4 \end{cases}$ が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{このとき } \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= (-a+3)^2 - 2(-3a+4) \\ &= a^2 - 6a + 9 + 6a - 8 \\ &= a^2 + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha^2\beta^2 &= (-3a+4)^2 \\ &= 9a^2 - 24a + 16. \quad \text{だから} \end{aligned}$$

α^2, β^2 を解と可る2次方程式の1つは

$$x^2 - (a^2+1)x + (9a^2-24a+16) = 0 \quad \text{より}$$

$$4x^2 - 4(a^2+1)x + 4(9a^2-24a+16) = 0$$

これが $4x^2 - kx + 5k = 0$ となるから

$$\begin{cases} 4(a^2+1) = k & \text{--- ①} \\ 4(9a^2-24a+16) = 5k & \text{--- ② が成り立つ。} \end{cases}$$

①②より $4(9a^2-24a+16) = 5 \cdot 4(a^2+1)$ だから

$$9a^2 - 24a + 16 = 5a^2 + 5$$

$$4a^2 - 24a + 11 = 0$$

$$\frac{2}{2} \times \frac{-1}{-11}$$

$$(2a-1)(2a-11) = 0$$

$$a = \frac{1}{2}, \frac{11}{2}$$

但し $-7 < a < 1$ より $a = \frac{1}{2}$ のみ

$$\begin{aligned} \text{このとき ①より } k &= 4(a^2+1) \\ &= 4\left(\frac{1}{4}+1\right) \\ &= 4 \times \frac{5}{4} = \boxed{5} \end{aligned}$$

第4問 (20)	解答記号	正解	配点
	アイ	20	2
	ウエ	-2	3
	エオ	$x+2$	1
	$x^2 + (a-k)x - k$ ア+ク	$x^2 + (a-3)x - 3a+4$	3
	ケコ, サ	-7, 1	3
	シス セ	$\frac{14}{5}$	3
	ソ タ	$\frac{1}{2}$	3
	チ	5	2