

(1) (x, y) を原点まわり、反時計まわりに 30° 回転させると (X, Y) になるとする

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3}X + Y \\ -X + \sqrt{3}Y \end{pmatrix} \text{ よう}$$

$$3x^2 + 2\sqrt{3}xy + 5y^2 = 24 \text{ は}$$

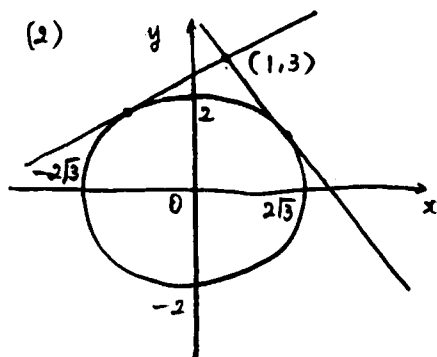
$$3 \cdot \frac{1}{4} (\sqrt{3}X + Y)^2 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} (\sqrt{3}X + Y)(-X + \sqrt{3}Y) + 5 \cdot \frac{1}{4} (-X + \sqrt{3}Y)^2 = 24 \text{ よう}$$

$$(9 - 6 + 5)X^2 + (6\sqrt{3} - 2\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 10\sqrt{3})XY + (3 + 6 + 15)Y^2 = 24 \cdot 4$$

$$8X^2 + 24Y^2 = 24 \cdot 4$$

$$X^2 + 3Y^2 = 12$$

よって C_2 は $\boxed{\text{E: 円 } \frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1}$ となる



求める接線は $y = m(x-1) + 3$ ① とおけるから

$$x^2 + 3y^2 = 12 \text{ に代入すると}$$

$$x^2 + 3(m(x-1) + 3)^2 = 12 \text{ よう}$$

$$(1 + 3m^2)x^2 + 6m(3-m)x + 3(3-m)^2 - 12 = 0$$

この判別式を D とすると $D = 0$ よう

$$\frac{D}{4} = \{3m(3-m)\}^2 - (1+3m^2)(3m^2 - 18m + 15) = 0 \text{ だから}$$

$$9m^2(m^2 - 6m + 9) - (9m^4 - 54m^3 + 48m^2 - 18m + 15) = 0$$

$$33m^2 + 18m - 15 = 0$$

$$11m^2 + 6m - 5 = 0$$

$$(m+1)(11m-5) = 0$$

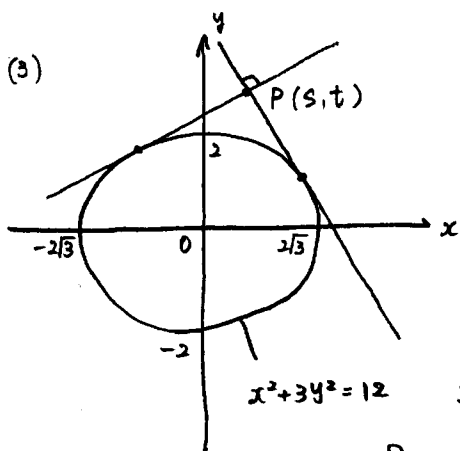
$$\text{よって } m = -1, \frac{5}{11}$$

$m = -1$ のとき ① は $y = -x + 4$.

$m = \frac{5}{11}$ のとき ① は $y = \frac{5}{11}x + \frac{28}{11}$.

よって 2本の接線は $y = -x + 4$ と $y = \frac{5}{11}x + \frac{28}{11}$ となる

(3)

 $P(s, t)$ とすると(i) 2本の接線が $y = k(x-s) + t$ で表せるとき $x^2 + 3y^2 = 12$ に代入して

$$x^2 + 3(kx + t - ks)^2 = 12 \text{ より}$$

$$(1+3k^2)x^2 + 6k(t-ks)x + 3(t-ks)^2 - 12 = 0$$

この判別式を D_1 とすると $D_1 = 0$ より

$$\frac{D_1}{4} = \{3k(t-ks)\}^2 - (1+3k^2)\{3(t-ks)^2 - 12\} = 0 \text{ だから}$$

$$9k^2(t-ks)^2 - 3(t-ks)^2 - 9k^2(t-ks)^2 + 12(1+3k^2) = 0 \text{ より}$$

$$(t-ks)^2 - 4(1+3k^2) = 0$$

$$(s^2 - 12)k^2 - 2stk + (t^2 - 4) = 0$$

これは k の 2 次方程式であり、この 2 つの解は 2 接線の傾きを表す。

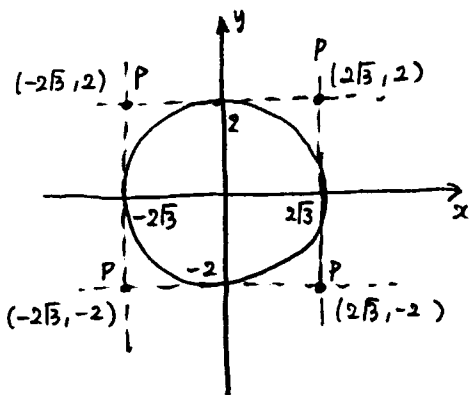
2 接線が直交するので、解と係数の関係から

 $s^2 - 12 \neq 0$ のとき

$$\frac{t^2 - 4}{s^2 - 12} = -1 \text{ である。}$$

$$\text{よって } t^2 - 4 = -s^2 + 12 \text{ より}$$

$$s^2 + t^2 = 16 \text{ となる}$$

(s, t) の軌跡は $x^2 + y^2 = 16$ 上にある
(但し、 $x \neq \pm 2\sqrt{3}$)(ii) 2本の接線の1つが x 軸に直交するとき $(2\sqrt{3}, 2), (2\sqrt{3}, -2), (-2\sqrt{3}, 2), (-2\sqrt{3}, -2)$

が求める軌跡となり

これは円 $x^2 + y^2 = 16$ 上の点となっている(i) (ii) から 求める点 P の軌跡は円 $x^2 + y^2 = 16$ となる4) C_2 を原点中心に時計まわりに 30° 回転させると C_2 になるので (3) の P を同様に回転して Q が求まるので Q の軌跡も円 $x^2 + y^2 = 16$ となる