

$x=y^2$ 上の点 (t^2, t) を通る傾き m の直線は

$$y = m(x - t^2) + t. \text{ であり,}$$

これを $2x^2 + y^2 = 2$ に代入すると

$$2x^2 + \{m(x - t^2) + t\}^2 = 2 \text{ より}$$

$$2x^2 + m^2(x - t^2)^2 + 2mt(x - t^2) + t^2 - 2 = 0$$

$$(2+m^2)x^2 - 2(m^2t^2 - mt)x + m^2t^4 - 2mt^3 + t^2 - 2 = 0$$

直線はた円に接するとき、この式の判別式を D とすると $D=0$ より

$$\frac{D}{4} = (m^2t^2 - mt)^2 - (2+m^2)(m^2t^4 - 2mt^3 + t^2 - 2) = 0 \text{ から}$$

$$\cancel{m^4t^4} - 2m^3t^3 + \cancel{m^2t^2} - (2m^2t^4 + \cancel{m^4t^4} - 4mt^3 - 2m^3t^3 + 2t^2 + \cancel{m^2t^2} - 4 - 2m^2) = 0$$
$$-2m^2t^4 + 4mt^3 - 2t^2 + 4 + 2m^2 = 0$$

$$(t^4 - 1)m^2 - 2t^3m + t^2 - 2 = 0$$

これを m の二次方程式とみて、その解を α, β とおくと

$$\text{解と係数の関係より } \alpha\beta = \frac{t^2 - 2}{t^4 - 1} \text{ であり.}$$

題意より 2つの接線が直交するとき $\alpha\beta = -1$ だから

$$\frac{t^2 - 2}{t^4 - 1} = -1 \text{ より}$$

$$t^2 - 2 = -t^4 + 1$$

$$t^4 + t^2 - 3 = 0$$

$$\text{よって } t^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \text{ であるが } t \text{ は実数より } t^2 \geq 0 \text{ だから}$$

$$t^2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{ゆえに } \boxed{\text{求める交点の } x \text{ 座標は } x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \text{ である}}$$