

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

$$(1) \quad c \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} - b \times \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 0 \text{ より}$$

$$c^2 + a^2 - b^2 - (a^2 + b^2 - c^2) = 0$$

$$2c^2 - 2b^2 = 0$$

$$(b+c)(b-c) = 0$$

$$\text{よって } b = c \text{ より}$$

$b = c$ の二等辺三角形 となる

$$(2) \quad a^2 \times \frac{b}{2R} \times \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - b^2 \times \frac{a}{2R} \times \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = 0$$

$$a^2(b^2 + c^2 - a^2) - b^2(c^2 + a^2 - b^2) = 0$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 - b^2c^2 - a^2b^2 + b^4 = 0$$

$$c^2(a^2 - b^2) - (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = 0$$

$$(a^2 - b^2)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$(a+b)(a-b)(c^2 - a^2 - b^2) = 0$$

$$\text{よって } a = b \text{ or } c^2 = a^2 + b^2 \text{ より}$$

$a = b$ の二等辺三角形 または $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

となる