

$$(1) \quad P(x) = x^3 + bx^2 + (2b-3)x - a \quad \text{において}$$

$$P(a) = 0 \text{ より}$$

$$P(a) = a^3 + ba^2 + (2b-3)a - a = 0$$

$$a \neq 0 \text{ だから} \quad a^2 + ba + 2b - 3 - 1 = 0$$

$$a^2 + \boxed{b}a + \boxed{2b} - \boxed{4} = 0$$

ア イウ エ

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & 2 \rightarrow 2 \\ 1 & \times & b-2 \rightarrow b-2 \end{array}$$

$$\text{よって} \quad a^2 + ba + 2(b-2) = 0 \text{ より}$$

$$(a+2) \{ a + (b-2) \} = 0$$

$$\text{ゆえに} \quad a = \boxed{2} - \boxed{b}, \quad \boxed{-2}$$

オ カ キ

$$(2) \quad a = 2-b \text{ のとき}$$

$$P(x) = x^3 + bx^2 + (2b-3)x - (2-b) \text{ であり}$$

$$P(-1) = -1 + b - 2b + 3 - 2 + b = 0 \text{ より}$$

$$P(x) = 0 \text{ は} \quad x = \boxed{-1} \text{ を解にもつ}$$

ク

$$(3) \quad a = -2 \text{ のとき}$$

$$P(x) = x^3 + bx^2 + (2b-3)x + 2 \text{ であり}$$

$$\begin{aligned} P(-2) &= -8 + 4b - 2(2b-3) + 2 \\ &= -8 + 4b - 4b + 6 + 2 = 0 \text{ より} \end{aligned}$$

$$P(x) \text{ は} \quad (x+2) \text{ を因数にもつ}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & b & 2b-3 & 2 & -2 \\ & -2 & -2b+4 & -2 & \\ \hline & 1 & b-2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x+\boxed{2}) \{ x^2 + \boxed{b-2}x + \boxed{1} \}$$

サ シス セ

3次方程式 $P(x) = 0$ が虚数解をもつときは

$x^2 + (b-2)x + 1 = 0$ が虚数解をもつから、この判別式を D とすると

$$D = (b-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0 \text{ より}$$

$$b^2 - 4b + 4 - 4 < 0$$

$$b(b-4) < 0$$

$$\text{よって} \quad \boxed{0} < b < \boxed{4}$$

ソ タ

1つの虚数解が $C + \frac{3}{5}i$ なら もうひとつは $C - \frac{3}{5}i$ より

$$x^2 + (b-2)x + 1 = \left\{ x - \left(C + \frac{3}{5}i \right) \right\} \left\{ x - \left(C - \frac{3}{5}i \right) \right\} \text{ とおいて}$$

$$\begin{aligned} x^2 + (b-2)x + 1 &= (x-C)^2 - \left(\frac{3}{5}i \right)^2 \\ &= x^2 - 2Cx + C^2 + \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$$\text{よって } \begin{cases} b-2 = -2C & \text{--- ①} \\ 1 = C^2 + \frac{9}{25} & \text{--- ②} \end{cases} \text{ がなりたつ。}$$

$$\text{②より } C^2 = \frac{16}{25} \text{ から } C = \pm \frac{4}{5} \text{ かつ}$$

$P(x)=0$ の解がすべて実数であるのは

$$P(x) = (x+2) \{ x^2 + (b-2)x + 1 \} \text{ において}$$

$x^2 + (b-2)x + 1 = 0$ が実数解をもてばよいから

$$D = (b-2)^2 - 4 \times 1 \times 1 \geq 0 \text{ より}$$

$$b^2 - 4b + 4 - 4 \geq 0$$

$$b^2 - 4b \geq 0$$

$$b(b-4) \geq 0$$

$$\text{よって } b \leq 0, 4 \leq b \text{ --- ③}$$

また $x^2 + (b-2)x + 1 = 0$ の解を α, β とおくと

解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(b-2) & \text{--- ④} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\beta = 1 & \text{--- ⑤} \end{cases}$$

また 3つの解 $-2, \alpha, \beta$ の和が $\frac{4}{3}$ より

$$\alpha + \beta - 2 = \frac{4}{3} \text{ から}$$

$$\alpha + \beta = \frac{10}{3}$$

$$\text{このとき ④は } \frac{10}{3} = -b + 2 \text{ より}$$

$$b = 2 - \frac{10}{3} = -\frac{4}{3} \text{ よって ③をみたす。}$$

$$\alpha + \beta = \frac{10}{3}, \alpha\beta = 1 \text{ より } \alpha, \beta \text{ は}$$

$$t^2 - \frac{10}{3}t + 1 = 0 \text{ の解だから}$$

$$\frac{1}{3} \times -3$$

$$3t^2 - 10t + 3 = 0$$

$$(t-3)(3t-1) = 0$$

$$t = 3, \frac{1}{3}$$

ゆえに $P(x)=0$ の3つの解は

$$x = \boxed{-2}, \boxed{3}, \boxed{\frac{1}{3}} \text{ である}$$

テト ナ

解答記号 正解 配点

$a^2 + 7a + 10 - 2$	$a^2 + 6a + 2b - 4$	2
オカ	$2 - b$	2
キク	-2	2
ケコ	-1	3
$(x+y)$ $(x^2 + (シ-ス)x + セ)$	$(x+2)$ $\{x^2 + (b-2)x + 1\}$	3
$0 < b < 4$	$0 < b < 4$	2
チ ツ	$\frac{4}{5}$	3
テト	-2	1
ナ	3	1
ニ ミ	$\frac{1}{3}$	1