

$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ の両辺を x で微分すると

$\frac{1}{4} \cdot 2x + 2y y' = 0$ より、 $y \neq 0$ のとき、

$$y' = -\frac{\frac{1}{2}x}{2y} = -\frac{x}{4y} \quad \text{だから、}$$

接点を $P(X, Y)$ とすると、接線 QR の式は、

$$y - Y = -\frac{X}{4Y}(x - X) \quad \text{より、} \quad \frac{X}{4}x + Yy = \frac{X^2}{4} + Y^2 \quad \text{で}$$

あるが、 $P(X, Y)$ は楕円上の点だから、 $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$ をみたすから、

接線の式は、 $\frac{X}{4}x + Yy = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}$ となる。

$x = 0$ のとき、 $y = \frac{1}{Y}$ で、 $y = 0$ のとき、 $x = \frac{4}{X}$ となるから、 $Q\left(\frac{4}{X}, 0\right)$, $R\left(0, \frac{1}{Y}\right)$ となる。

よって、 $QR^2 = \left(\frac{4}{X}\right)^2 + \left(\frac{1}{Y}\right)^2 = \frac{16}{X^2} + \frac{1}{Y^2}$ であるが、 $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$ より

$$Y^2 = 1 - \frac{X^2}{4} \quad \text{だから、} \quad QR^2 = \frac{16}{X^2} + \frac{1}{1 - \frac{X^2}{4}} = \frac{16}{X^2} + \frac{4}{4 - X^2} \cdots \cdots \textcircled{2} \quad \text{となる。}$$

$$\text{ゆえに、} \quad \frac{d(QR^2)}{dX} = \frac{16 \cdot (-2)}{X^3} + \frac{-4 \cdot (-2X)}{(4 - X^2)^2} = \frac{-32(4 - X^2)^2 + 8X^4}{X^3(4 - X^2)^2}$$

$$= \frac{-32(16 - 8X^2 + X^4) + 8X^4}{X^3(4 - X^2)^2} = \frac{-8(3X^4 - 32X^2 + 64)}{X^3(4 - X^2)^2}$$

$$\frac{-8(3X^2 - 8)(X^2 - 8)}{X^3(4 - X^2)^2} \quad \text{よって、} \quad X = \pm 2\sqrt{2}, \pm \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad \text{のとき、} \quad \frac{d(QR^2)}{dX} = 0 \quad \text{と}$$

なるが、 $0 < X < 2$ の定義域で考えるから、増減表は下のようになる。

X	0	...	$\frac{2\sqrt{6}}{3}$	...	2
$\frac{d(QR^2)}{dX}$		-	0	+	
QR^2		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

よって、 $X = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ のとき QR^2 は最小値をとり、

そのときの Y と QR^2 は

$$Y^2 = 1 - \frac{X^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{より、} \quad Y = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$QR^2 = \frac{16}{\frac{8}{3}} + \frac{4}{4 - \frac{8}{3}} = \frac{16 \cdot 3}{8} + \frac{4 \cdot 3}{12 - 8} = 6 + 3 = 9 \quad \text{より、} \quad QR = 3 \quad \text{となる。}$$

ゆえに、線分 QR の長さの最小値は 3、そのときの点 P の座標は $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ となる。

