100回さいころを投げて、1の目がちょうど k $(0 \leqq k \leqq 100)$ 回出る確率は、

$$ {}_{100}C_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-k} $$

$$ = {}_{100}C_k \ \frac{\boxed{5^{100-k}}^{(ケ)}}{6^{100}} $$ である。

この確率を P_k とすると

$$ \frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{{}_{100}C_{k+1} \times \frac{5^{100-(k+1)}}{6^{100}}}{{}_{100}C_k \times \frac{5^{100-k}}{6^{100}}} $$

$$ = \frac{\frac{100!}{(k+1)!\{100-(k+1)\}!} \times 5^{100-k-1}}{\frac{100!}{k!\,(100-k)!} \times 5^{100-k-1} \times 5} $$

$$ = \frac{k!\ (100-k)!}{(k+1)!\ (100-k-1)!} \times \frac{1}{5} $$

$$ = \frac{\cancel{k!} \cdot (100-k) \cdot \cancel{(100-k-1)!}}{(k+1) \cdot \cancel{k!} \cdot \cancel{(100-k-1)!}} \times \frac{1}{5} $$

$$ = \frac{100-k}{5(k+1)} $$ より

$\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1$ をとくと $\frac{100-k}{5(k+1)} > 1$ より

$$ 100-k > 5k+5 $$

$$ 6k < 95 $$

$$ k < \frac{95}{6} \ (\fallingdotseq 15.8) $$

また $\frac{P_{k+1}}{P_k} < 1$ をとくと $k > \frac{95}{6}$ だから

$k = 0, 1, 2, \cdots, 15$ のとき $\frac{P_{k+1}}{P_k} > 1$ より $P_k < P_{k+1}$

$k = 16, 17, 18, \cdots, 99$ のとき $\frac{P_{k+1}}{P_k} < 1$ より $P_k > P_{k+1}$ となる。

ゆえに $P_0 < P_1 < P_2 < \cdots < P_{15} < P_{16} > P_{17} > P_{18} > \cdots\cdots > P_{99} > P_{100}$

となるから、この確率が最大になるのは $\underset{(コ)}{\boxed{k=16}}$ のときである

次に、さいころをつづけて n 回なげて、ちょうど k 回 1 の目がでる確率を q_k とすると

$$q_k = {}_nC_k \times \left(\frac{1}{6}\right)^k \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{5^{n-k}}{6^n} \quad \text{より}$$

$$\frac{q_{k+1}}{q_k} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!\{n-(k+1)\}!} \times \dfrac{5^{n-(k+1)}}{6^n}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!} \times \dfrac{5^{n-k}}{6^n}}$$

$$= \frac{k!\cdot(n-k)\cdot(n-k-1)!}{(k+1)\cdot k!\cdot(n-k-1)!} \times \frac{5^{n-k-1}}{5^{n-k-1}\times 5}$$

$$= \frac{(n-k)}{5(k+1)} \quad \text{より}$$

最大値が2個あるときは $\dfrac{q_{k+1}}{q_k} = 1$ をみたすので

$$\frac{n-k}{5(k+1)} = 1 \quad \text{より}$$

$n-k = 5k+5$ から $n = 6k+5$

よって n を $\boxed{6}_{サ}$ でわった余りが $\boxed{5}_{シ}$ になる