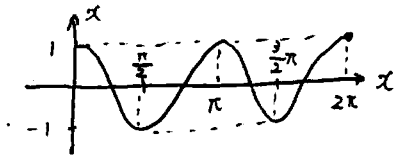
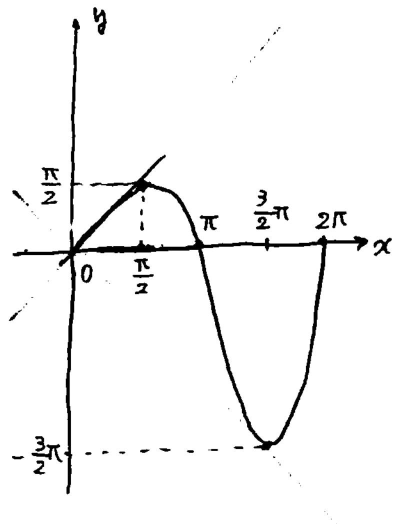
$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t\sin t \end{cases}.$$

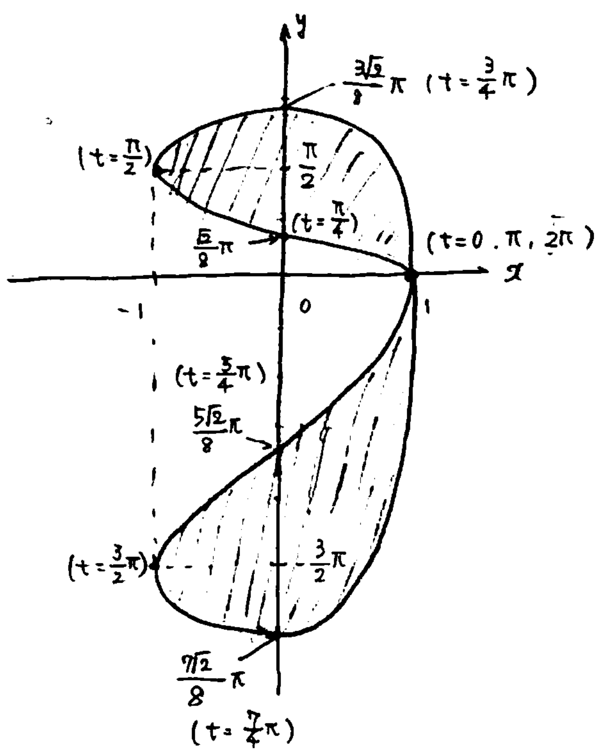
・$x = \cos 2t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフは下図



・$y = t\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ のグラフは下図



よって $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = t\sin t \end{cases}$ の概形は下のようになる



交差する点は $t=\alpha, \beta$ とすると $(\alpha \neq \beta)$

$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos 2\beta & \text{—①} \\ \alpha\sin\alpha = \beta\sin\beta & \text{—②} \end{cases}$ がなりたち

① より $1-2\sin^2\alpha = 1-2\sin^2\beta$

$\sin^2\alpha = \sin^2\beta$ —③

② の両辺 2乗すると

$\alpha^2\sin^2\alpha = \beta^2\sin^2\beta$ で

③ を代入して $\alpha^2\sin^2\alpha = \beta^2\sin^2\alpha$ より

$(\alpha^2-\beta^2)\sin^2\alpha = 0$

$\alpha \neq \beta$ より $\sin\alpha = 0$

よって $\alpha = 0, \pi, 2\pi$ となるから

交差する点は $t = 0, \pi, 2\pi$ のみ

である

ゆえに 求める面積を Sとすると $dx = -2\sin 2t\, dt$ より

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (t\sin t)(-2\sin 2t)dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (t\sin t)(-2\sin 2t)dt$$

$$+ \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} (t\sin t)(-2\sin 2t)dt - \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} (t\sin t)(-2\sin 2t)dt$$

となる.

ここで $\int (-2t\sin t\sin 2t)dt$

$$= \int (-4t\sin^2 t\cos t)dt$$

$$= \int \{(-4t)\cdot(\tfrac{1}{3}\sin^3 t)'\} dt$$

$$= -\frac{4}{3}t\sin^3 t + \frac{4}{3}\int \sin^3 t\, dt$$

$$= -\frac{4}{3}t\sin^3 t + \frac{4}{3}\int (1-\cos^2 t)\sin t\, dt$$

$$= -\frac{4}{3}t\sin^3 t + \frac{4}{3}\left(-\cos t + \frac{1}{3}\cos^3 t\right) + C$$ (Cは定数)

$$= -\frac{4}{3}t\sin^3 t - \frac{4}{3}\cos t + \frac{4}{9}\cos^3 t + C$$

$$= \frac{4}{9}(\cos^3 t - 3t\sin^3 t - 3\cos t) + C.$$ となるから

$$S = \frac{4}{9}\Big[\cos^3 t - 3t\sin^3 t - 3\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \frac{4}{9}\Big[\cos^3 t - 3t\sin^3 t - 3\cos t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$+ \frac{4}{9}\Big[\cos^3 t - 3t\sin^3 t - 3\cos t\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi} - \frac{4}{9}\Big[\cos^3 t - 3t\sin^3 t - 3\cos t\Big]_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}$$

$$= \frac{4}{9}\left\{(-1+3) + 3\times\frac{\pi}{2}\times 1\right\} - \frac{4}{9}\left\{(1-3) + 3\times\frac{\pi}{2}\times 1\right\}$$

$$+ \frac{4}{9}\left\{(-1+3) + 3\times\frac{3}{2}\pi\times(-1)\right\} - \frac{4}{9}\left\{(1-3) + 3\times\frac{3}{2}\pi\times(-1)\right\}$$

$$= \frac{4}{9}\left\{(2+2+2+2) + \left(\frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi - \frac{9}{2}\pi + \frac{9}{2}\pi\right)\right\}$$

$$= \frac{4}{9}\times 8$$

$$= \boxed{\frac{32}{9}}$$