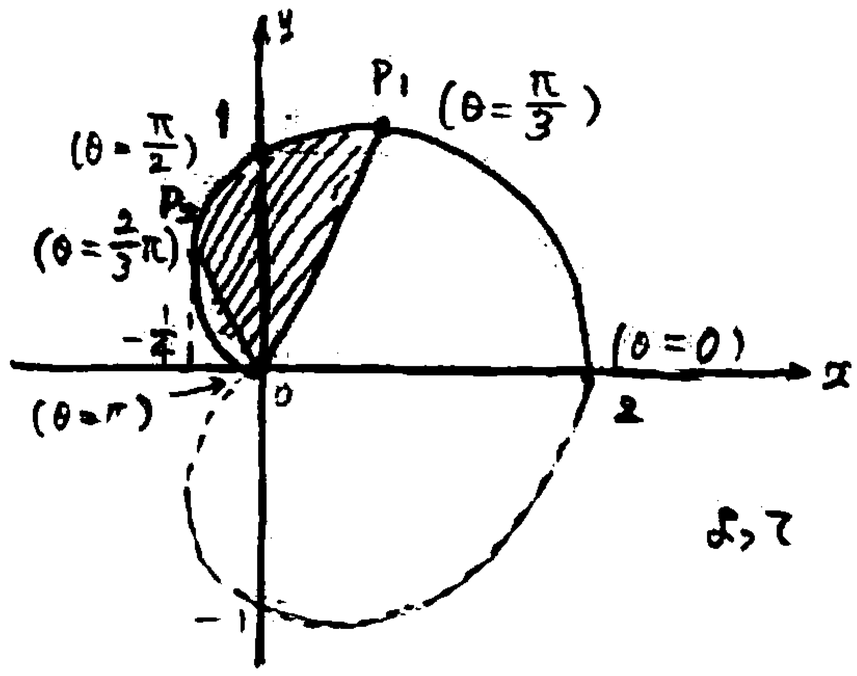
(1)　$r = 1 + \cos\theta$ の概形は下のようになる



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$ であるから

$$\begin{cases} x = (1+\cos\theta)\cos\theta \\ y = (1+\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$ となる

よって　$x = \cos^2\theta + \cos\theta$

$= \left(\cos\theta + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$　より

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ で x は最小値 $-\frac{1}{4}$ をとる.

ゆえに x 座標が最小となる P_2 の極座標は

$r = 1 + \cos\theta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$　より　$\boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)}$

また　$\frac{dy}{d\theta} = -\sin\theta \cdot \sin\theta + (1+\cos\theta)\cos\theta$

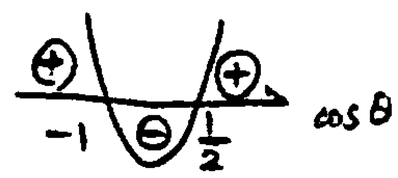
$= -\sin^2\theta + \cos\theta + \cos^2\theta$

$= -(1-\cos^2\theta) + \cos\theta + \cos^2\theta$

$= 2\cos^2\theta + \cos\theta - 1$

$= (\cos\theta + 1)(2\cos\theta - 1)$

$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 2 & \times & -1 \end{array}$



よって y の増減表は以下のようになる

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π
$\frac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
y		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 最大	↘	

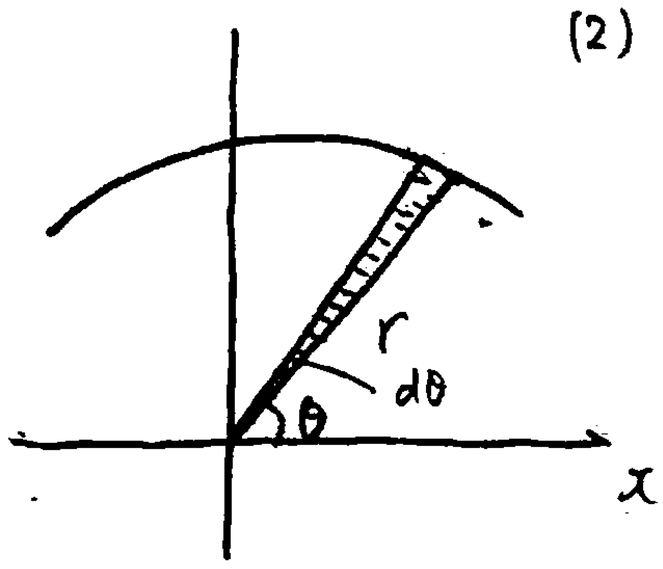
$\theta = \frac{\pi}{3}$ で y は最大で、その値は　$y = \left(1 + \cos\frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\frac{\pi}{3}$

$= \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ をとる

ゆえに y 座標が最大となる点 P_1 の極座標は　$r = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ より

$\boxed{\left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right)}$ である.

(2)



左図の微小面積 dS は

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\theta \quad \text{より}$$

求める面積 S は

$$S = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \frac{1}{2} (1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\sin\frac{2}{3}\pi - 2\sin\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\sin\frac{4}{3}\pi - \frac{1}{4}\sin\frac{2}{3}\pi \right\}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{8}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$= \boxed{\frac{2\pi-\sqrt{3}}{8}}$$