(1) $f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと、

$$f'(x)=\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x^2+x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-(x+1)+x}{x(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}$$ より

$x>0$ では $f'(x)<0$ であるから、$f(x)$ は単調減少である。

また、$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=\log 1-0=0$ であることから

$x>0$ では $f(x)>0$ が成り立つ。

ゆえに $x>0$ のとき、$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$ が成り立つ。

(2)　$x>0$ において $g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ を考えると $g(x)=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ より、

$$g'(x)=1\cdot\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}$$

$$=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{-1}{x^2+x}=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0\ \ (\because (1)\text{ より})$$

よって、$g(x)$ は $x>0$ のとき、単調増加であるから

$\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$ であるので、$g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$ が成り立つ。

ゆえに、$\log\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$ がなりたつから、

$$\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$ となる。