

(1) $f(x) = x \log x$ とおく

$$f'(x) = 1 \times \log x + x \times \frac{1}{x} = 1 + \log x \quad \text{より} \quad f'(x) = 0 \text{ をとくと}$$

$$\log x = -1 \quad \text{より}$$

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

よって $0 < x < 1$ での増減表は下のようになる

x	0	...	$\frac{1}{e}$	...	1
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	0

最小

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \log e^{-1} = -\frac{1}{e}$$

$$f(1) = 1 \times \log 1 = 0 \quad \text{よって最小値は} -\frac{1}{e}$$

$$\text{また} \quad 0 < x < 1 \quad \text{では} \quad \log x < 0 \quad \text{より}$$

$$\text{両辺に} x (> 0) \text{ をかけ} \quad x \log x < 0 \quad \text{である}$$

ゆえに $0 < x < 1$ のとき

$$\boxed{-\frac{1}{e} \leq x \log x < 0 \text{ がなりたつ}$$

(2) $0 < x < 1$ であるから $x \log x < 0$ は明らかになりたつ。

$$-\frac{2}{e}\sqrt{x} \leq x \log x \quad \text{を示すには} \quad \text{両辺} -\frac{2}{e}\sqrt{x} (< 0) \text{ でわって} \quad -1 \geq \frac{x \log x}{-\frac{2}{e}\sqrt{x}} \quad \text{を示せばよい}$$

$$\text{よって} \quad g(x) = \frac{x \log x}{-\frac{2}{e}\sqrt{x}} = -\frac{e}{2}\sqrt{x} \log x \quad \text{とおくと}$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{e}{2} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \log x + \sqrt{x} \times \frac{1}{x} \right) \\ &= -\frac{e}{2} \times \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \quad \text{のとき} \quad \log x = -2 \quad \text{より} \quad x = \frac{1}{e^2}$$

よって増減表は右のようになる

x	0	...	$\frac{1}{e^2}$	...	1
$g'(x)$		+	0	-	
$g(x)$		$\nearrow$	1 最大	$\searrow$	0

$$g\left(\frac{1}{e^2}\right) = -\frac{e}{2} \sqrt{\frac{1}{e^2}} \times \log e^{-2} = -\frac{e}{2} \times \frac{1}{e} \times (-2) = 1 \quad \text{より}$$

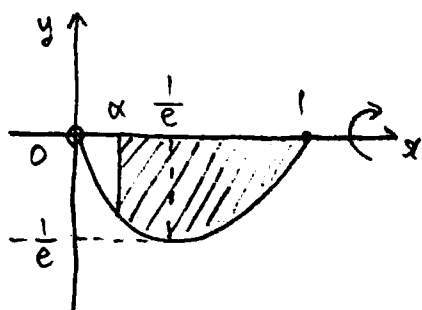
$$0 < x < 1 \quad \text{で} \quad g(x) \leq 1 \quad \text{となる}$$

ゆえに $0 < x < 1$ で $-\frac{2}{e}\sqrt{x} \leq x \log x < 0$ はなりたつ

はさみうちの定理より $x \rightarrow +0$ のとき $-\frac{2}{e}\sqrt{x} \rightarrow 0$ だから

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0} \quad \text{となる}$$

(3) (1)(2)より $y = x \log x$ のグラフは下のようになり



$0 \leq x \leq 1$ の範囲で x 軸のまわりに回転してできる体積を

$V(x)$ とすると

$$V(x) = \pi \int_0^1 (x \log x)^2 dx \quad \text{であるから}$$

$$V(\alpha) = \pi \int_{\alpha}^1 (x \log x)^2 dx$$

$$= \pi \int_{\alpha}^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)' (\log x)^2 dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3}x^3 (\log x)^2 \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{3}\pi \int_{\alpha}^1 x^3 \times 2 (\log x)' \frac{1}{x} dx$$

$$= \pi \left(-\frac{1}{3}\alpha^3 (\log \alpha)^2 \right) - \frac{1}{3}\pi \times 2 \int_{\alpha}^1 x^2 (\log x) dx$$

$$= \pi \left\{ -\frac{1}{3}\alpha^3 (\log \alpha)^2 \right\} - \frac{2}{3}\pi \int_{\alpha}^1 \left(\frac{1}{3}x^3\right)' (\log x) dx$$

$$= \pi \left\{ -\frac{1}{3}\alpha^3 (\log \alpha)^2 \right\} - \frac{2}{3}\pi \left[\frac{1}{3}x^3 (\log x) \right]_{\alpha}^1 + \frac{2}{3}\pi \times \frac{1}{3} \int_{\alpha}^1 x^3 \frac{1}{x} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\pi \alpha^3 (\log \alpha)^2 + \frac{2}{9}\pi \alpha^3 (\log \alpha) + \frac{2}{9}\pi \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{\alpha}^1$$

$$= -\frac{1}{3}\pi \alpha^3 (\log \alpha)^2 + \frac{2}{9}\pi \alpha^3 (\log \alpha) + \frac{2}{27}\pi (1 - \alpha^3)$$

$$= \left[-\frac{1}{3}\pi \alpha^3 (\log \alpha)^2 + \frac{2}{9}\pi \alpha^3 (\log \alpha) - \frac{2}{27}\pi \alpha^3 + \frac{2}{27}\pi \right]$$

(4) (3) 51

$$\boxed{\lim_{\alpha \rightarrow +0} V(\alpha) = \frac{2}{27}\pi} \quad \text{253}$$