(1) $P(x) = x^3 + (5a-b)x^2 + (2a+b)x + b$

$Q(x) = x^3 + (7a-b)x^2 + (9a+b)x + 5a + b$ より

$P(x) - Q(x) = 0$ の解は

$(-2a)x^2 + (-7a)x - 5a = 0$ より

$a \neq 0$ であるから　$2x^2 + 7x + 5 = 0$ から　$\left(\begin{matrix}1 & & 1 & \to & 2\\ 2 & \times & 5 & \to & 5\\ & & & & \overline{7}\end{matrix}\right)$

$(x+1)(2x+5) = 0$

よって　$x = \underset{アイ}{\boxed{-1}},\ \boxed{\dfrac{-5}{2}}$ ウエ／オ

また $P(x) = 0$ が $x = -1$ を解にもつとき

$P(-1) = 0$ より　$-1 + (5a-b) - (2a+b) + b = 0$ から

$-1 + 5a - 2a - b = 0$ より

$b = \underset{カ}{\boxed{3}}a - \underset{キ}{\boxed{1}}$

(2) $b = 3a - 1$ のとき

$P(x) = x^3 + (5a-3a+1)x^2 + (2a+3a-1)x + (3a-1)$

$= x^3 + (2a+1)x^2 + (5a-1)x + (3a-1)$

$= (x + \underset{ク}{\boxed{1}})(x^2 + \underset{ケ}{\boxed{2}}ax + \underset{コ}{\boxed{3}}a - \underset{サ}{\boxed{1}})$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2a+1 & 5a-1 & 3a-1 & \underline{-1} \\ & -1 & -2a & -3a+1 & \\ \hline 1 & 2a & 3a-1 & 0 & \end{array}$$

また $Q(x) = x^3 + (7a-3a+1)x^2 + (9a+3a-1)x + 5a + 3a - 1$

$= x^3 + (4a+1)x^2 + (12a-1)x + 8a - 1$

$= (x + \boxed{1})(x^2 + \underset{シ}{\boxed{4}}ax + \underset{ス}{\boxed{8}}a - \underset{セ}{\boxed{1}})$ となる

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 4a+1 & 12a-1 & 8a-1 & \underline{-1} \\ & -1 & -4a & -8a+1 & \\ \hline 1 & 4a & 8a-1 & 0 & \end{array}$$

よって $P(x) = 0$ が虚数解をもつとき

$a^2 - 1 \times (3a-1) < 0$ より

$a^2 - 3a + 1 < 0$

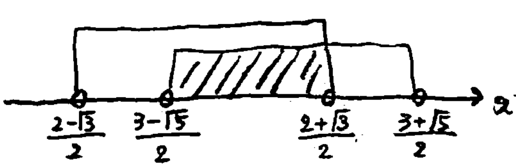
よって　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < a < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

$Q(x) = 0$ が虚数解をもつとき

$(2a)^2 - 1 \times (8a-1) < 0$ より

$4a^2 - 8a + 1 < 0$

よって　$\dfrac{4-2\sqrt{3}}{4} < a < \dfrac{4+2\sqrt{3}}{4}$ から　$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2} < a < \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$



ゆえに　$\dfrac{\overset{ソ}{\boxed{3}} - \sqrt{\overset{タ}{\boxed{5}}}}{\underset{チ}{\boxed{2}}} < a < \dfrac{\overset{ツ}{\boxed{2}} + \sqrt{\overset{テ}{\boxed{3}}}}{\underset{ト}{\boxed{2}}}$

$P(x)=0$ の 2つの 虚数解は

$x^2+2ax+3a-1=0$ の解だから、この2解が α, β のとき

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-2a \\ \alpha\beta=3a-1 \end{cases}$$ がなりたつ

ここで $\dfrac{\alpha+3\beta}{2}+\dfrac{3\alpha+\beta}{2}=2(\alpha+\beta)$
$=-4a$.

$$\begin{aligned}\frac{\alpha+3\beta}{2}\times\frac{3\alpha+\beta}{2} &= \frac{1}{4}(3\alpha^2+3\beta^2+10\alpha\beta) \\ &= \frac{1}{4}\{3(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta\} \\ &= \frac{1}{4}\{3\times(-2a)^2+4(3a-1)\} \\ &= \frac{1}{4}\{3\times4a^2+4(3a-1)\} \\ &= 3a^2+3a-1.\end{aligned}$$

よって $\dfrac{\alpha+3\beta}{2}$, $\dfrac{3\alpha+\beta}{2}$ を解にもつ 2次方程式のひとつは

$x^2+4ax+(3a^2+3a-1)=0$ より

これが $Q(x)$ の $x^2+4ax+8a-1=0$ と等しくなるから

$3a^2+3a-1=8a-1$ より
$3a^2-5a=0$
$a\left(a-\frac{5}{3}\right)=0$
$a=0,\ \frac{5}{3}$

ここで $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$ より $a=\boxed{\dfrac{5}{3}}$ ト ナ