(1) $P(x)=x^3-ax^2-ax+2a-1$ は $x=\underset{\text{ア}}{\boxed{1}}$ を解にもつので

$$P(x)=(x-\underset{\text{ア}}{\boxed{1}})\{x^2+(\underset{\text{イ}}{\boxed{1}}-\underset{\text{ウ}}{\boxed{a}})x-\underset{\text{エオ}}{\boxed{2a}}+\underset{\text{カ}}{\boxed{1}}\}$$

とできる。

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -a & -a & 2a-1 & \underline{1} \\ & 1 & -a+1 & -2a+1 & \\ \hline 1 & -a+1 & -2a+1 & 0 & \end{array}$$

(2) $P(x)=0$ の整数解が $1, m, n$ $(\underset{\text{キ}}{m}<\underset{\text{ク}}{n})$ とすると

解と係数の関係より $m+n=\boxed{a}-\boxed{1}$ —①

$mn=\underset{\text{ケ}}{\boxed{1}}-\underset{\text{コサ}}{\boxed{2a}}$ —② であるから

①×2 $\quad 2m+2n=2a-2$

② $\quad +)\ mn=1-2a$

①×2+②より $\quad 2m+2n+mn=-1$ から

$(m+2)(n+2)-4=-1$

よって $(m+\underset{\text{シ}}{\boxed{2}})(n+2)=3$ がなりたつ。

$m<n$ より $(m+2,\ n+2)=(1,3),(-3,-1)$ だから

$(m,n)=(-1,1),(-5,-3)$.

$1, m, n$ は相異なる3整数より $(m,n)=(-1,1)$ は不適

よって $(m,n)=(\underset{\text{スセ}}{\boxed{-5}},\underset{\text{ソタ}}{\boxed{-3}})$ となる

ゆえに①から $a=m+n+1$

$=-5-3+1=\underset{\text{チツ}}{\boxed{-7}}$ となる

(3) $P(x)=0$ が虚数解をもつとき $x^2+(1-a)x-2a+1=0$ —③ の判別式をDとすると

$D<0$ より $D=(1-a)^2-4(-2a+1)<0$ から

$a^2-2a+1+8a-4<0$

$a^2+6a-3<0$

よって $\underset{\text{テト}}{\boxed{-3}}-\underset{\text{ナニ}}{\boxed{2\sqrt{3}}}<a<-3+2\sqrt{3}$ となる

また③の解は $x=\dfrac{-(1-a)\pm\sqrt{(1-a)^2-4(-2a+1)}}{2}$ より

この虚部が $\pm\sqrt{2}$ のとき $\pm\sqrt{\dfrac{(1-a)^2-4(-2a+1)}{4}}=\pm\sqrt{-2}$ となるから

$(1-a)^2-4(-2a+1)=-8$ より

$a^2+6a-3=-8$

$a^2+6a+5=0$

$(a+1)(a+5)=0$

よって $a=-\underset{\text{ヌ}}{\boxed{5}},\ -\underset{\text{ネ}}{\boxed{1}}$.