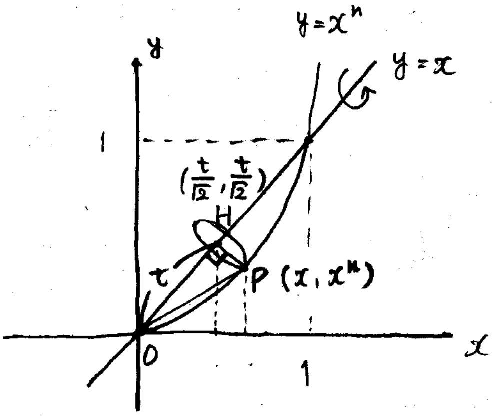

(1) $y=x$ と $y=x^n$ の共有点は $x \geqq 0$ のとき

$(0, 0), (1, 1)$ である

$y=x^n$ 上の点を $P(x, x^n)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とする。

Pから $y=x$ 上に下ろした垂線の足を H とし、

$OH = t$ とすると H は $\left(\frac{t}{\sqrt2}, \frac{t}{\sqrt2}\right)$ である

ここで PH は $x-y=0$ と $P(x, x^n)$ の距離であるから

$$PH = \frac{|x - x^n|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{x-x^n}{\sqrt2}$$ であり

$PH^2 = OP^2 - OH^2$ より

$\frac{(x-x^n)^2}{2} = (x^2+x^{2n}) - t^2$ だから

$$t^2 = \frac{1}{2}(2x^2+2x^{2n} - x^2 + 2x^{n+1} - x^{2n})$$
$$= \frac{1}{2}(x^2+2x^{n+1}+x^{2n})$$
$$= \frac{1}{2}(x+x^n)^2$$

t, x は正より $t = \frac{1}{\sqrt2}(x+x^n)$ である。

よって $dt = \frac{1}{\sqrt2}(1+nx^{n-1})\,dx$ であるから

$$V = \int_0^{\sqrt2} \pi PH^2 dt = \pi \int_0^1 \frac{(x-x^n)^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt2}(1+nx^{n-1})\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt2}\int_0^1 (x^2 - 2x^{n+1} + x^{2n})(1+nx^{n-1})\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt2}\int_0^1 (x^2 - 2x^{n+1} + x^{2n} + nx^{n+1} - 2nx^{2n} + nx^{3n-1})\,dx$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt2}\int_0^1 \left\{x^2 - (2n-1)x^{2n} + (n-2)x^{n+1} + nx^{3n-1}\right\} dx$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2n-1}{2n+1} + \frac{n-2}{n+2} + \frac{n}{3n}\right)$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt2}\left\{\frac{1}{3} - \left(1 - \frac{2}{2n+1}\right) + \left(1 - \frac{4}{n+2}\right) + \frac{1}{3}\right\}$$
$$= \frac{\pi}{2\sqrt2}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{2n+1} - \frac{4}{n+2}\right)$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+2}\right) \quad \text{—①}$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt2} \times \frac{(2n+1)(n+2) + 3(n+2) - 6(2n+1)}{3(2n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{\pi \times 2(n-1)^2}{3\sqrt2(2n+1)(n+2)} = \boxed{\frac{\sqrt2(n-1)^2}{3(2n+1)(n+2)}\pi}$$

(2) ①より $\lim_{n\to\infty} V_n = \frac{\pi}{3\sqrt2} = \boxed{\frac{\sqrt2}{6}\pi}$ となる。