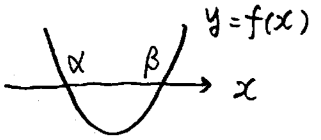
$f(x)=5x^2-2kx+1$ とおくと x^2の係数が正より $y=f(x)$ のグラフは下に凸である

$f(x)<0$ となるのは $f(x)=0$ の判別式をDとすると $D>0$ のときだから



$\frac{D}{4}=(-k)^2-5>0$ より

$k^2-5>0$

よって $k>0$ より $k>\sqrt{5}$ となる

ここでkは整数とするとkは $k\geqq 3$ の整数である —①

またここで $f(x)=0$ の解を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると

$$\beta-\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2-5}}{5}-\frac{k-\sqrt{k^2-5}}{5}=\frac{2\sqrt{k^2-5}}{5}$$ であり

$\beta-\alpha>2$ であればこの間にある整数は2つ以上となるので

これを解くと $\frac{2\sqrt{k^2-5}}{5}>2$ より

$\sqrt{k^2-5}>5$

両辺2乗して $k^2-5>25$ より

$k^2-30>0$

$k>0$ より $k>\sqrt{30}$ となるので

これをみたす整数kは $k\geqq 6$ である —②

①②より 求める整数kは $k=3, 4, 5$ の場合以外には存在しない

$k=3$ のとき $f(n)<0$ をとくと $5n^2-6n+1<0$ より

$(5n-1)(n-1)<0$

よって $\frac{1}{5}<n<1$ より

これをみたす整数nは存在しないので不適

$k=4$ のとき $f(n)<0$ をとくと $5n^2-8n+1<0$ より

$\frac{4-\sqrt{11}}{5}<n<\frac{4+\sqrt{11}}{5}$ であり

$0<\frac{4-4}{5}<\frac{4-\sqrt{11}}{5}<n<\frac{4+\sqrt{11}}{5}<\frac{4+4}{5}=\frac{8}{5}$ より

$n=1$ のみが解で題意をみたす

$k=5$ のとき $f(n)<0$ をとくと $5n^2-10n+1<0$ より

$0<\frac{5-5}{5}<\frac{5-\sqrt{20}}{5}<n<\frac{5+\sqrt{20}}{5}<\frac{5+5}{5}=2$ だから

$n=1$ のみが解で題意をみたす

以上のことから求める整数kは $\boxed{k=4, 5}$ である

別解

$5n^2-2kn+1<0$ は

$2kn>5n^2+1$

ここで右辺は正よりこの式をみたすとき $2kn$ も正であり $k>0$ より $2n$ も正.

よって両辺 $2n\ (>0)$ で割ると

$k>\dfrac{5n^2+1}{2n}$ より

$\boxed{k>\frac{1}{2}\left(5n+\frac{1}{n}\right)}$ —① ①をみたす整数 n がただ1つとなる k を求める

ここで $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(5x+\dfrac{1}{x}\right)$ とすると

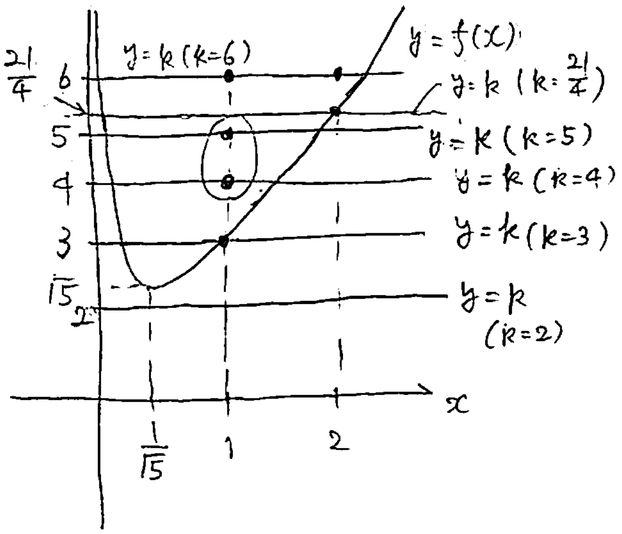
$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5x^2-1}{x^2}$ より

$x>0$ での $f(x)$ の増減表は以下のようになる

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$\sqrt{5}$ 極小	$\nearrow$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)=\sqrt{5}$

$\lim\limits_{x\to+0}f(x)=+\infty$ より $y=f(x)$ のグラフは左のようになる



$f(1)=\frac{1}{2}(5+1)=3$

$f(2)=\frac{1}{2}\left(5\times2+\frac{1}{2}\right)=\frac{21}{4}$

よって $y=f(x)=\frac{1}{2}\left(5x+\frac{1}{x}\right)$ と

$y=k$ のグラフを考えて

$k>f(x)$ をみたす整数 x がただ1つになるようにすればよい

$k=4, 5$ のとき $x=1$ のみのただ1つの解をもつから

$k=4, 5$ が解

$k\geqq6$ であれば $k>f(x)$ をみたす整数 x は2個以上ある

$k\leqq2$ であれば $k>f(x)$ をみたさない

以上のことから、求める k の値は

$\boxed{k=4, 5}$ の2つである