(1) $2x^3-ax^2-(4a^2-2b^2)x+3a^3+4ab^2+6b^3$ とする。

$P=(2x+3a)(x-a)(x-c)+(px+q)$ とおくことができるか　ら、

$$2x^3-ax^2-(4a^2-2b^2+p)x+(3a^3+4ab^2+6b^3-q)=(2x+3a)(x-a)(x-c)$$
$$=2x^3+(3a-2a-2c)x^2+(-3a^2-3ac+2ac)x+3a^2c$$
$$=2x^3+(a-2c)x^2+(-3a^2-ac)x+3a^2c$$ より、

$$\begin{cases}-a=a-2c & \cdots\cdots ①\\ -(4a^2-2b^2+p)=-3a^2-ac & \cdots\cdots ②\\ 3a^3+4ab^2+6b^3-q=3a^2c & \cdots\cdots ③\end{cases}$$ が成り立つ。

①より、 $c=a$ だから、②は　$p=-4a^2+2b^2+3a^2+a^2=2b^2$

③は $q=3a^3+4ab^2+6b^3-3a^3=4ab^2+6b^3$ となる。

よって、求める余りは　$px+q=2b^2x+4ab^2+6b^3=[2]b^2(x+[2]a+[3]b)$ となる。

$b=0$ の場合、 P は Q で割り切れて　$P=(2x+3a)(x-a)^2$ となる。

$b\neq 0$ の場合、

P が $x-a$ で割り切れるならば　P を x の関数 $P(x)$とみると、 $P(a)=0$ より

　$P(a)=2b^2(a+2a+3b)=6b^2(a+b)=0$ だから、 $a+b=[0]$ である。

P が $2x+3a$ で割り切れるならば　$P\left(-\dfrac{3}{2}a\right)=0$ より、

$P\left(-\dfrac{3}{2}a\right)=2b^2\left(-\dfrac{3}{2}a+2a+3b\right)=2b^2\cdot\dfrac{a+6b}{2}=0$ から、 $a+[6]b=0$ である。

(2) $P(x)=(2x+3a)(x-a)(x-c)+2b^2(x+2a+3b)$ であるから、

　$a+b=0$ のとき、$P(a)=(2a+3a)(a-a)(a-c)+2b^2(a+2a+3b)$

$=0+2b^2\cdot 3(a+b)=0$となるから、P は $x-a$ で割り切れる。

　また、$b=0$ のときも$P(a)=0$となるので、P は $x-a$ で割り切れる。よって、

「$a+b=0\Rightarrow P$ が $x-a$ で割り切れる」は成り立つが、

「$a+b=0\Leftarrow P$ が $x-a$ で割り切れる」は成り立たない(反例 $b=0$)。

ゆえに、P が $x-a$ で割り切れるためには、$a+b=0$ が成り立てば十分であるから

[カ]は[2]の十分条件となる。

次に、$b(a+b)(a+6b)=0$ のとき、$b=0$ または $a+b=0$ または $a+6b=0$ である

ので、「$b(a+b)(a+6b)=0\Leftarrow P$ が $2x+3a$ と $x-a$ の両方で割り切れる」

は成り立つが、その逆は成り立たない。

よって、P が $2x+3a$ と $x-a$ の両方で割り切れるためには、$b(a+b)(a+6b)=0$

の集合の中に入っていることが必要であるから、[キ]は[1]の必要条件となる。

また、$b(a+6b)=0\Leftrightarrow b=0$ または $a+6b=0$

$\Leftrightarrow P=(2x+3a)(x-a)^2$ または $P\left(-\dfrac{3}{2}a\right)=0$

$\Leftrightarrow P\left(-\dfrac{3}{2}a\right)=0$　であるから、

[ク]は[0]の必要十分条件となる。

解答記号	正　解	配点
ア $b^2(x+$ イ $a+$ ウ $b)$	$2b^2(x+2a+3b)$	5
エ	0	3
$a+$ オ b	$a+6b$	3
カ	2	3
キ	1	3
ク	0	3