(1) $f(x) = \log(1+x)^{\frac{1}{x}} - \log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ とおくと.

真数条件より $\begin{cases} 1+x>0 \\ 1-x>0 \end{cases}$ より $-1<x<1$ であり

また $x \neq 0$ であるから

$f(x)$ の定義域は $-1<x<1$ かつ $x \neq 0$ である

$f(x)$ を変形すると

$$f(x) = \frac{1}{x}\log(1+x) - \left(1-\frac{1}{x}\right)\log(-x+1)$$

$$= \frac{1}{x}\log(x+1) + \frac{x-1}{x}\log(-x+1)$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\log(x+1) + (1-x)\log(-x+1)\right\}$$

ここで $g(x) = \log(x+1) + (-x+1)\log(-x+1)$ とおくと

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} + (-1)\times\log(-x+1) + (-x+1)\times\frac{-1}{-x+1}$$

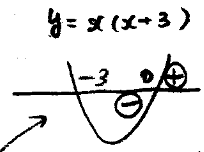
$$= \frac{1}{x+1} - 1 - \log(-x+1)$$

$$= \frac{1-(x+1)}{x+1} - \log(-x+1)$$

$$= \frac{-x}{x+1} - \log(-x+1)$$

$$g''(x) = \frac{-1\times(x+1) + x\times 1}{(x+1)^2} - \frac{-1}{-x+1}$$

$$= \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{-x+1}$$



$$= \frac{-(-x+1) + (x+1)^2}{(x+1)^2(-x+1)}$$

$$= \frac{x^2+3x}{(x+1)^2(-x+1)} = \frac{x(x+3)}{(x+1)^2(-x+1)}$$

よって $-1<x<0$ のとき $g''(x)<0$ より $g'(x)$ は単調減少

$0<x<1$ のとき $g''(x)>0$ より $g'(x)$ は単調増加となり

$g'(0) = 0 - \log 1 = 0$ より

$-1<x<0,\ 0<x<1$ で $g'(x)>0$ となる.

ここで $g(0) = \log 1 + 1\times\log 1 = 0$ より

$g(x)$の増減表は以下のようになる

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

ゆえに　$-1<x<0$ で　$g(x)<0$ より　$f(x)=\dfrac{1}{x}\times g(x)>0$

$0<x<1$ で　$g(x)>0$ より　$f(x)=\dfrac{1}{x}\times g(x)>0$　となって.

$-1<x<0,\ 0<x<1$ で $f(x)>0$ がなりたつので

$$\log(1+x)^{\frac{1}{x}} > \log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$$ がなりたつので

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} > (1-x)^{1-\frac{1}{x}}$$ がなりたつ

(2)　(1)の不等式より　$(1-x)(1-x)^{-\frac{1}{x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}}$ がなりたち.

両辺に $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ (>0) をかけてもなりたつので

$$(1-x) < (1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$ がなりたつ.
└①

よって①式のxに $x=0.01$ を代入してもなりたつので

$$(1-0.01) < (1-0.01^2)^{\frac{1}{0.01}}$$ より

$\boxed{0.99 < 0.9999^{100}}$ ―② がなりたつ

また①式に $x=-0.01$ を代入してもなりたつので

$$1.01 < 0.9999^{-\frac{1}{0.01}}$$ より

$$1.01 < 0.9999^{-100}$$

両辺に $0.9999^{101}\times\dfrac{1}{1.01}$ をかけて

$$0.9999^{101} < \frac{0.9999}{1.01}$$ より

$\boxed{0.9999^{101} < 0.99}$ ―③ がなりたつ

$$\begin{array}{r} 0.99 \\ 1.01\,\overline{)\,0.9999} \\ 909 \\ \hline 909 \\ 909 \end{array}$$

②③より　$0.9999^{101} < 0.99 < 0.9999^{100}$ がなりたつ