

$$(1) \quad r = \frac{3}{2 + \sin \theta} \quad \text{より}$$

$$r(2 + \sin \theta) = 3$$

$$2r + r \sin \theta = 3$$

$$2r = 3 - r \sin \theta$$

両辺2乗して

$$4r^2 = (3 - r \sin \theta)^2$$

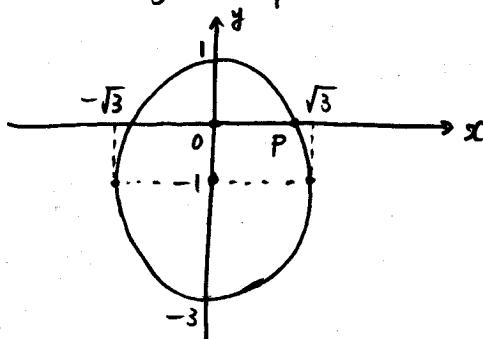
$$\text{よって } 4(x^2 + y^2) = (3 - y)^2 \text{ が成り立つから}$$

$$4x^2 + 4y^2 = y^2 - 6y + 9 \quad \text{より}$$

$$4x^2 + 3y^2 + 6y = 9$$

$$4x^2 + 3(y+1)^2 = 12 \quad \text{--- ①}$$

$$\text{ゆえに } \frac{x^2}{3} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1 \quad \text{となり、下のようなた円となる}$$



$$(2) \quad \text{①に } y=0 \text{ を代入すると } 4x^2 + 3 = 12 \text{ より}$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{よって P点は } \left(\frac{3}{2}, 0\right) \text{ となる}$$

また ①を x で両辺微分すると

$$8x + 6(y+1) \cdot y' = 0 \quad \text{より}$$

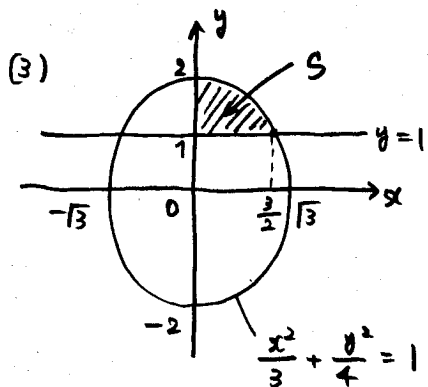
$$y \neq -1 \text{ のとき } y' = -\frac{4x}{3(y+1)} \quad \text{となり}$$

$$(x, y) = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \text{ のとき } y' = -\frac{4 \times \frac{3}{2}}{3 \times 1} = -\frac{6}{3} = -2 \quad \text{だから}$$

求める接線は 傾き -2 で $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ を通る直線より

$$y = -2\left(x - \frac{3}{2}\right) \quad \text{だから}$$

$$\boxed{y = -2x + 3} \quad \text{となる}$$



求める面積を S とすると

$$S \text{ は } \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ と } y=1 \text{ と } x=0 \text{ で}$$

囲まれる部分の面積と同じであり、

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1 \text{ は}$$

$$4x^2 + 3y^2 = 12 \text{ となり}$$

$$3y^2 = 12 - 4x^2$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{4(3-x^2)}{3}} = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} \text{ となり}$$

$$y > 0 \text{ で考えればよいので } y = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} \text{ となる}$$

$$\text{よって } S = \int_0^{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} - 1 \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2} dx - \frac{3}{2} \quad \text{であり}$$

$$x = \sqrt{3} \sin t \text{ とおくと}$$

x	0	$\dots$	$\frac{3}{2}$
t	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$

なり

$$dx = \sqrt{3} \cos t dt$$

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{3-3\sin^2 t} \cdot \sqrt{3} \cos t dt - \frac{3}{2}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} 2 \sqrt{3} \cos^2 t dt - \frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2t) dt - \frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{3} \left[t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \frac{3}{2}$$

$$= \sqrt{3} \times \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \pi + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3} \pi - \frac{3}{4}}$$