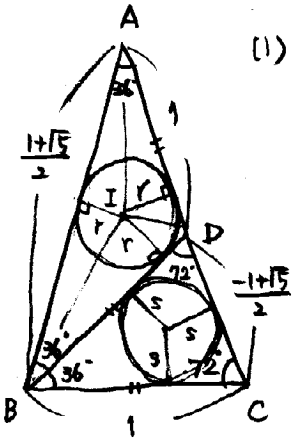

(1) $\angle ABD = \angle BAD$ より $\triangle DAB$ は

$DA = DB$ の二等辺三角形

また $\angle BCD = \angle BDC = 72°$ より $\triangle BCD$ は

$BC = BD$ の二等辺三角形となる

よって $AD = BD = BC = \boxed{1}$

また $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ より $AC = x$ とおくと

$AC = AB = x$ であり

$AB : BC = BC : CD$ だから

$x : 1 = 1 : (x-1)$ より

$x(x-1) = 1$ だから

$x^2 - x - 1 = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$x > 0$ より $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ よって $\boxed{AC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ となる

(2) $\cos 72° = \dfrac{\frac{1}{2}BC}{AC} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{5-1} = \boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$

(3) $AD : CD = 1 : \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ の面積比は

$\triangle ABD : \triangle BCD = 1 : \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より $\boxed{\triangle BCD = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \times \triangle ABD}$ —①

また $\begin{cases} \frac{1}{2}(AB+AD+BD) \times r = \triangle ABD \\ \frac{1}{2}(BD+BC+CD) \times s = \triangle BCD \end{cases}$ より ① をつかうと

$$\frac{r}{s} = \frac{(BD+BC+CD) \times \triangle ABD}{(AB+AD+BD) \times \triangle BCD}$$

$$= \frac{1+1+\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1+1} \times \frac{\triangle ABD}{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \times \triangle ABD}$$

$$= \frac{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \times \frac{2}{(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{2(3+\sqrt{5})}{\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$$

$$= \frac{\cancel{2}^{1}(3+\sqrt{5})}{\cancel{4}_{2}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(3+\sqrt{5})}{10} = \boxed{\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}$$