(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ より $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-(\log x)\cdot 1}{x^2}$

$$=\frac{1-\log x}{x^2}$$

よって $f'(x)=0$ の解は $\log x=1$ より $x=e$ であるから 増減表は下のようになる

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	極大	↘

ゆえに $\boxed{\begin{array}{l} 0<x\leqq e \text{ で } f(x) \text{ は単調増加} \\ e\leqq x \text{ で } f(x) \text{ は単調減少} \end{array}}$ となる

(2). $e<\pi$ であるから (1)より $f(e)>f(\pi)$ がなりたつので

$\dfrac{\log e}{e}>\dfrac{\log \pi}{\pi}$ がなりたつから

この式を変形すると

$\pi\log e > e\log\pi$

$\log e^{\pi} > \log \pi^{e}$ もなりたつ

よって 底 e は 1 より大きいので

$\boxed{e^{\pi}>\pi^{e}}$ がなりたつ。