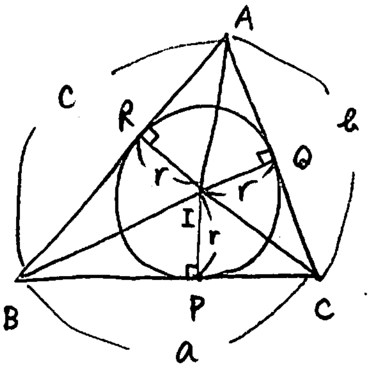

△ABCの内接円の中心をI

内接円とBC，CA，ABとの接点をそれぞれP，Q，Rとすると
$\begin{cases} IP = IQ = IR = r \\ IP \perp BC,\ IQ \perp CA,\ IR \perp AB \end{cases}$ であるから

△ABCの面積がSのとき

$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$ がなりたち

$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$ としても一般性は失われないので

$S = \frac{1}{2} IP \cdot a + \frac{1}{2} IQ \cdot b + \frac{1}{2} IR \cdot c$ より

$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr$ だから

$S = \frac{1}{2}(a+b+c) r$ がなりたつ

ここで　$l = \frac{1}{2}(a+b+c)$ のとき　$S = lr$ となるので
$\boxed{r = \frac{S}{l}}$ がなりたつ

次に　$S = \frac{1}{2} ac \sin B$ がなりたち．また $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ もなりたつことから

$S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2\sin^2 B}$ より

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2(1-\cos^2 B)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2c^2\left\{1 - \frac{(c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2a^2}\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2c^2}{4} \times \frac{4c^2a^2 - (c^2+a^2-b^2)^2}{4c^2a^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left\{4c^2a^2 - (a^4+c^4+b^4+2c^2a^2-2a^2b^2-2b^2c^2)\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left\{-a^4-c^4-b^4+2a^2c^2+2a^2b^2+2b^2c^2\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left\{-a^4+2(b^2+c^2)a^2-(b^2-c^2)^2\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left[-a^4+2\left\{(b+c)^2+(b-c)^2\right\}a^2-(b+c)^2(b-c)^2\right]} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}\left\{-a^2+(b-c)^2\right\}\left\{a^2-(b+c)^2\right\}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{16}(b-c+a)(b-c-a)(a-b-c)(a+b+c)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\times\left(\frac{c+a-b}{2}\right)\times\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\times\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)\left(\frac{c+a+b}{2}-b\right)\left(\frac{b+c+a}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right)} \\
&= \sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}
\end{aligned}
$$

となる．よって $\boxed{S = \sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}}$ はなりたつ