(1) $\begin{cases} x = \sqrt{\cos 2t}\cos t \\ y = \sqrt{\cos 2t}\sin t \end{cases}$ より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-\cancel{2}\sin 2t}{\cancel{2}\sqrt{\cos 2t}} \times \sin t + \sqrt{\cos 2t}\cdot\cos t$$

$$= \frac{-\sin 2t\sin t + \cos 2t\cos t}{\sqrt{\cos 2t}}$$

$$= \frac{\cos 3t}{\sqrt{\cos 2t}}$$ となる　$\frac{dy}{dt}=0$ をとくと $\cos 3t = 0$ より $3t = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$

$$t = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2n\pi}{3}$$

よって $-\frac{\pi}{4} \leqq t \leqq \frac{\pi}{4}$ での増減表は下のようになる

t	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{dy}{dt}$		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\searrow$	0

$t = -\frac{\pi}{6}$ のとき $y = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

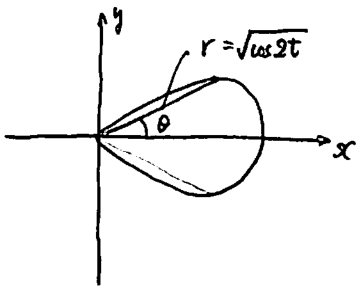
$t = \frac{\pi}{6}$ のとき $y = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

ゆえに $\boxed{y\text{の最大値は } \frac{\sqrt{2}}{4}}$ であり、

そのとき $t = \frac{\pi}{6}$ より $\boxed{x\text{の値は } x} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{6}}{4}}$ となる

(2) $x^2 + y^2 = r^2 = \cos 2t$ であるので

求める図形の面積を S とすると



$$S = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{4}(1+1) = \boxed{\frac{1}{2}}$$ となる.