



$\triangle ABC$ と $\triangle PAC$ であるから, $\angle APC = 60^\circ$

余弦定理より

$$BC^2 = 1^2 + x^2 - 2 \times 1 \times x \times \cos 60^\circ \quad \text{だから}$$

$$BC^2 = 1 + x^2 - x$$

$$\text{よって } \boxed{BC = \sqrt{1-x+x^2}}$$

また $AC:BC = PC:AC$ より

$$CP = \frac{AC^2}{BC} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x+x^2}} = \boxed{\frac{x^2 \sqrt{1-x+x^2}}{1-x+x^2}}$$

$AB:AC = AP:PC$ より

$$AP = \frac{AB \cdot PC}{AC} = \frac{1 \cdot x^2}{x \sqrt{1-x+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x+x^2}} = \boxed{\frac{x \sqrt{1-x+x^2}}{1-x+x^2}}$$

$\triangle ABC$ と $\triangle PAC$ の相似比は

$$1 : \frac{x}{\sqrt{1-x+x^2}} \quad \text{だから}$$

面積比は

$$1 : \frac{x^2}{1-x+x^2} \quad \text{となる。}$$

よって

$$S = \triangle APB = \triangle ABC - \triangle APC$$

$$= \triangle ABC - \frac{x^2}{1-x+x^2} \triangle ABC$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{1-x+x^2}\right) \triangle ABC$$

$$= \frac{1-x+x^2-x^2}{1-x+x^2} \cdot \frac{1}{2} \times 1 \times x \times \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1-x}{1-x+x^2} \times \frac{x}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \boxed{\frac{\sqrt{3}x(1-x)}{4(1-x+x^2)}} \quad \text{となる}$$