

$a = 3 + 2\sqrt{2}$, $b = 2 + \sqrt{3}$ のとき

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{1 \times (3-2\sqrt{2})}{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})} = \frac{3-2\sqrt{2}}{9-8} = \boxed{3} - \boxed{2}\sqrt{\boxed{2}}$$

ア イ ウ

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1 \times (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = \boxed{2} - \sqrt{\boxed{3}}$$

エ オ

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} - \frac{b}{a} &= \frac{1}{b} \times a - \frac{1}{a} \times b \\ &= (2-\sqrt{3}) \cdot (3+2\sqrt{2}) - (3-2\sqrt{2})(2+\sqrt{3}) \\ &= (\cancel{6} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) - (\cancel{6} + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) \quad \text{--- ①} \\ &= \boxed{8}\sqrt{\boxed{2}} - \boxed{6}\sqrt{\boxed{3}} \quad \text{である.} \end{aligned}$$

カ キ ク ケ

このとき $|2abx - a^2| < b^2$ をとくと

a, b は正だから

$$2ab \left| x - \frac{a^2}{2ab} \right| < b^2 \quad \text{より}$$

$$\left| x - \frac{a}{2b} \right| < \frac{b}{2a} \quad \text{である.}$$

$$\text{よって} \quad -\frac{b}{2a} < x - \frac{a}{2b} < \frac{b}{2a} \quad \text{より} \quad \downarrow + \frac{a}{2b}$$

$$\frac{a}{2b} - \frac{b}{2a} < x < \frac{b}{2a} + \frac{a}{2b}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) < x < \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \right)$$

$$\frac{1}{2} (8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}) < x < \frac{1}{2} \{ (6 - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) + (6 + 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 2\sqrt{6}) \} \quad (\text{①より})$$

$$4\sqrt{2} - 3\sqrt{3} < x < \frac{1}{2} (12 - 4\sqrt{6})$$

$$\text{よって} \quad \boxed{4}\sqrt{\boxed{2}} - \boxed{3}\sqrt{\boxed{3}} < x < \boxed{6} - \boxed{2}\sqrt{\boxed{6}} \quad \text{となる}$$

コ サ シ ス セ ソ タ

解答記号	正 解	配点
ア-イ√ウ	$3 - 2\sqrt{2}$	2
エ-オ	$2 - \sqrt{3}$	2
カ√キ-ク√ケ	$8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$	2
コ√サ-シ√ス	$4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$	2
セ-ソ√タ	$6 - 2\sqrt{6}$	2

(1)

(a, b)	q	p
① $(0, 0)$	○	○
② $(1, 0)$	○	○
③ $(0, 1)$	×	×
④ $(1, 1)$	○	×

よって、 $q \Rightarrow p$ の反例は

③

(2) 「 $p \Rightarrow q$ 」の対偶は「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」であるから

$$\boxed{|a+b| \geq 1 \text{ かつ } |a-2b| \geq 2} \Rightarrow \boxed{(a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 5}$$

ツ ④

テ ⑦

となる

(3) $\bar{q} \Leftrightarrow |a+b| \geq 1 \text{ かつ } |a-2b| \geq 2$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 1 \text{ かつ } (a-2b)^2 \geq 4$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 + (a-2b)^2 \geq 5 \Leftrightarrow \bar{p} \text{ だから}$$

「 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ 」は真より

「 $p \Rightarrow q$ 」は真

また (1) より 「 $q \Rightarrow p$ 」は偽であるから

p は q であるための 十分条件 で 必要条件ではない

ト ②

解答記号	正解	配点
チ	3	3
ツ	4	2
テ	7	2
ト	2	3

10点

$$y = -3x^2 + 12hx = -3(x^2 - 4hx) \\ = -3(x - 2h)^2 + 12h^2 \quad \text{より 軸は } x = 2h.$$

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{の軸は } x = -\frac{b}{2a} \text{ より} \\ 2h = -\frac{b}{2a} \quad \text{から } h \neq 0 \text{ より}$$

$$a = \boxed{\frac{-1}{4}} \quad \begin{matrix} \text{アイ} \\ \text{ウ} \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{別解} \quad a : h = -3 : 12h \text{ より} \\ 12ah = -3h \\ \text{よって } a = -\frac{1}{4} \end{array} \right)$$

さらに G が $(1, 2h-1)$ を通るとき

$$2h-1 = -\frac{1}{4} \times 1^2 + h \times 1 + c \quad \text{より}$$

$$c = 2h-1 - h + \frac{1}{4} = h - \boxed{\frac{3}{4}} \quad \begin{matrix} \text{エ} \\ \text{オ} \end{matrix}$$

以上のことより G は $y = -\frac{1}{4}x^2 + hx + (h - \frac{3}{4})$ となる

(1) G と x 軸が異なる2点で交わるとき

$$b^2 - 4ac > 0 \text{ より}$$

$$h^2 - 4 \times (-\frac{1}{4}) \times (h - \frac{3}{4}) > 0$$

$$h^2 + h - \frac{3}{4} > 0$$

$$4h^2 + 4h - 3 > 0$$

$$\frac{2}{2} \times -\frac{3}{1}$$

$$(2h+3)(2h-1) > 0$$

$$\text{よって } h < \boxed{\frac{-3}{2}}, \boxed{\frac{1}{2}} < h \quad \text{となる} \quad \text{--- ①}$$

さらに G と x 軸の正の部分で異なる2点で交わるとき

「(軸) > 0」かつ「 $x=0$ で $y < 0$ 」であるから
 $\text{--- ②} \quad \text{--- ③}$

$$\text{②より } -\frac{b}{2a} > 0 \text{ である}$$

$$-\frac{1}{2} \times (-4)h > 0 \text{ より}$$

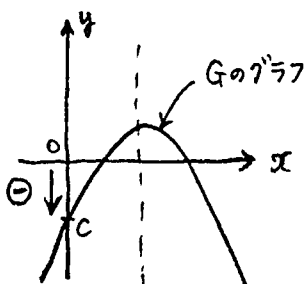
$$h > 0 \quad \text{--- ②'}$$

$$\text{③より } c < 0 \text{ より } h - \frac{3}{4} < 0 \text{ から}$$

$$h < \frac{3}{4} \quad \text{--- ③'}$$

① ②' ③' より

$$\text{すなわち } \boxed{\frac{1}{2}} < h < \boxed{\frac{3}{4}} \text{ となる}$$



$$(2) \quad y = -\frac{1}{4}x^2 + lx + l - \frac{3}{4}$$

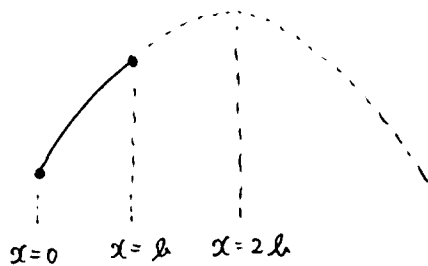
$$= -\frac{1}{4}(x-2l)^2 + l^2 + l - \frac{3}{4} \quad \text{「あるのて」}$$

軸は $x=2l$ だから $0 \leq x \leq l$ のとき

$x=0$ で 最小値 $-\frac{1}{4}$ となる。

$$\text{よって } l - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4} \text{ より}$$

$$l = \boxed{\frac{1}{2}} \text{ ヲ } \text{である。}$$



また $x \geq l$ のとき 最大値 3 となるのは $x=2l$ のときだから

$$l^2 + l - \frac{3}{4} = 3 \text{ より}$$

$$4l^2 + 4l - 3 = 12 \text{ から}$$

$$4l^2 + 4l - 15 = 0$$

$$\frac{2}{2} \times \frac{-3}{5}$$

$$(2l-3)(2l+5)=0$$

$$l > 0 \text{ より } l = \boxed{\frac{3}{2}} \text{ ナ } \text{ッ}$$

$$l = \frac{1}{2} \text{ のとき } G_1: y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \text{ より}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x-1)^2 \text{ よって 頂点は } (1, 0)$$

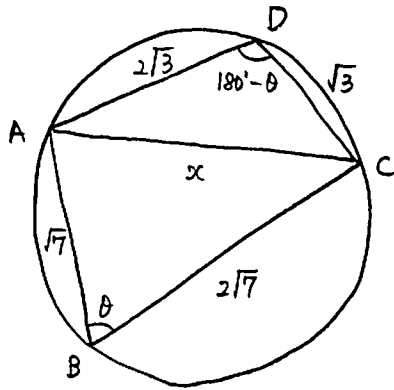
$$l = \frac{3}{2} \text{ のとき } G_2: y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \text{ より}$$

$$y = -\frac{1}{4}(x-3)^2 + 3 \text{ よって 頂点は } (3, 3)$$

ゆえに G_1 を x 軸方向に $\boxed{2}$ 、 y 軸方向に $\boxed{3}$ 平行移動すれば

G_2 に一致する

解答記号	正解	配点
アイ ウ	$-\frac{1}{4}$	3
エ オ	$\frac{3}{4}$	2
カキ ク	$-\frac{3}{2}$	2
ケ コ	$\frac{1}{2}$	2
サ シ	$\frac{1}{2}$	3
ス セ	$\frac{3}{4}$	3
ソ タ	$\frac{1}{2}$	4
チ ツ	$\frac{3}{2}$	4
テ, ト	2, 3	2



(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$x^2 = (\sqrt{7})^2 + (2\sqrt{7})^2 - 2 \times \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} \cos \theta \quad \text{だから}$$

$$x^2 = 7 + 4 \times 7 - 4 \times 7 \cos \theta$$

$$x^2 = \boxed{35} - 28 \cos \theta \quad \text{--- ①}$$

ア

また $\triangle ACD$ で余弦定理より

$$x^2 = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \cos(180^\circ - \theta) \quad \text{だから}$$

$$x^2 = 4 \times 3 + 3 + 4 \times 3 \cos \theta$$

$$x^2 = 15 + \boxed{12} \cos \theta \quad \text{--- ②}$$

イ

①②より $15 + 12 \cos \theta = 35 - 28 \cos \theta \quad \text{だから}$

$$40 \cos \theta = 20$$

$$\cos \theta = \boxed{\frac{1}{2}} \quad \text{オカ} \quad \text{よって } \theta = 60^\circ, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{である}$$

よって ①から $x^2 = 35 - 28 \times \frac{1}{2} = 35 - 14 = 21$

よって $x = \boxed{\sqrt{21}}$

キク

円の半径は $\triangle ABC$ で正弦定理より 半径を R とすると

$$2R = \frac{x}{\sin \theta} \quad \text{から}$$

$$R = \frac{\sqrt{21}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\sqrt{7}}$$

ケ

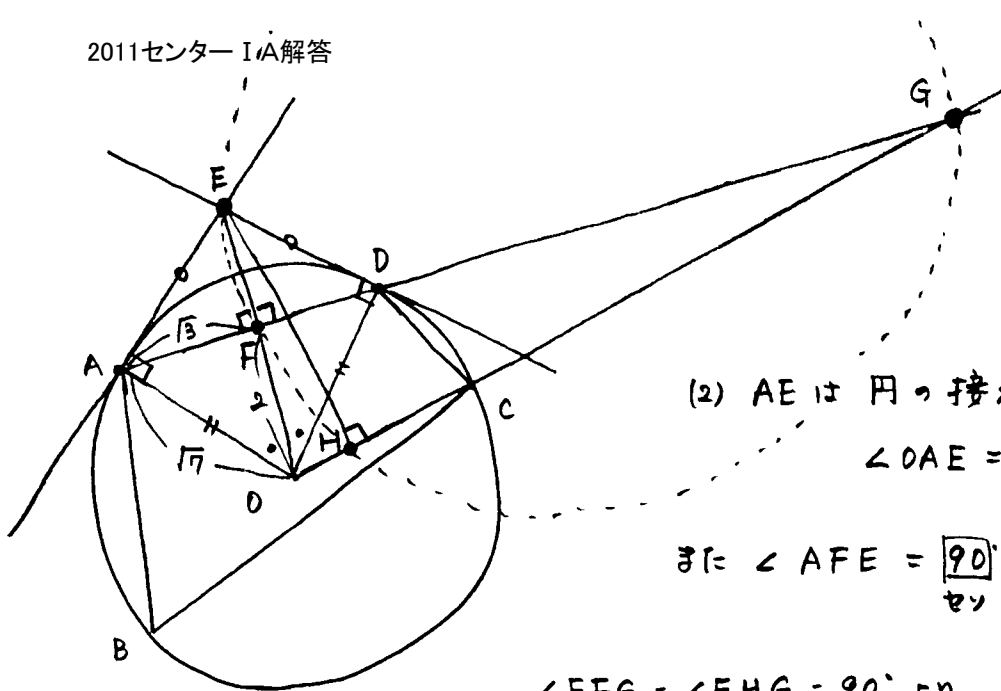
また $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ であることより

(四角形 $ABCD$ の面積) = $\triangle ABC + \triangle DAC$

$$= \frac{1}{2} \times \sqrt{7} \times 2\sqrt{7} \times \sin \theta + \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} \times \sin(180^\circ - \theta)$$

$$= 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \boxed{5\sqrt{3}} \quad \text{コカ}$$



(2) AE は円の接線より

$$\angle OAE = \boxed{90}^\circ$$

ミス

また $\angle AFE = \boxed{90}^\circ$ もなりたつ
せん

$$\angle EFG = \angle EHG = 90^\circ \text{ ㄱ}$$

円周角の定理の逆から

E.G. H, F は 同一円上にある
 4 ②

$$OA = \sqrt{7}, AF = \frac{1}{2}AD = \sqrt{3} \quad \text{だから 三平方の定理より}$$

$$OF = \sqrt{(17)^2 - (13)^2} = \sqrt{4} = 2$$

また $\triangle OAF$ と $\triangle OEA$ だから

$$OA : OF = OE : OA \quad \text{よって}$$

$$OE \cdot OF = OA^2$$

$$\text{Ex 7 } OE = \frac{OA^2}{OF} = \frac{7}{2}$$

ゆえに EG, H, F を通る円の方べきの定理より

$$OH \cdot OG = OF \cdot OE = 2 \times \frac{7}{2} = \boxed{7} \text{ cm}^2.$$

解答番号	正解	面数
アイ	35	2
ウエ	12	3
オ カ	$\frac{1}{2}$	3
√キク	$\sqrt{21}$	3
√ケ	$\sqrt{7}$	3
コ√サ	$5\sqrt{3}$	3
シス°	90°	2
セソ°	90°	2
タ	7	3
チ	2	3
ツ	7	3

1個のさいころをなげて 4以下が出る確率 p は $p = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$ ア

5以上が出る確率 q は $q = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$ ウ である。

(1) 8回のうち 4以下がちょうど 3回出る確率は

$${}^8C_3 \cdot p^3 \cdot q^5 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} p^3 q^5 = \boxed{56} p^3 q^5$$

エ

1回目が4以下で、あとの7回で 4以下が 2回だけ出るのは

$$p \times {}^7C_2 \times p^2 \times q^5 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} p^3 q^5 = \boxed{21} p^3 q^5$$

キ

1回目が5以上で、あとの7回で 4以下が 3回だけ出るのは

$$q \times {}^7C_3 \times p^3 \times q^4 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} p^3 q^5 = \boxed{35} p^3 q^5$$

ク

(2) よって ${}^8C_3 = \boxed{{}^7C_2 + {}^7C_3}$ となりたつ

サ ②

$$\begin{aligned} \text{また } \left\{ \begin{array}{l} {}^7C_2 = {}^7C_5 \\ {}^7C_3 = {}^7C_4 \end{array} \right. \quad \text{より} \quad {}^8C_3 = \boxed{{}^7C_4 + {}^7C_5} \quad \text{もなりたつ} \end{aligned}$$

シ ⑥

(3) 得点を X とすると $X=6$ の確率は

はじめ 5回は 5以上で、のこり 3回 4以下より $p^3 q^5$ ス ヒ

$X=3$ となるのは

はじめ 2回は 5以上で、3回目は 4以下、のこり 5回で 4以下が 2回
5以上が 3回出るので

$$q \times q \times p \times {}^5C_2 \times p^2 \times q^3 = \boxed{10} p^3 q^5$$

リ

同様に考えると $X=5$ のとき $q^4 \times p \times {}^3C_2 p^2 q^1 = 3 p^3 q^5$

$$X=4 \text{ のとき } q^3 \times p \times {}^4C_2 p^2 q^2 = 6 p^3 q^5$$

$$X=2 \text{ のとき } q \times p \times {}^6C_2 p^2 q^4 = 15 p^3 q^5$$

$$X=1 \text{ のとき } p \times {}^7C_2 p^2 q^5 = 21 p^3 q^5$$

よって求める期待値は

$$\begin{aligned}
 & 1 \times 21 p^3 q^5 + 2 \times 15 p^3 q^5 + 3 \times 10 p^3 q^5 + 4 \times 6 p^3 q^5 + 5 \times 3 p^3 q^5 + 6 \times p^3 q^5 \\
 &= p^3 q^5 \times (21 + 30 + 30 + 24 + 15 + 6) \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times 126 \\
 &= \frac{2^3 \times \cancel{3} \times \cancel{3} \times 14}{3^6 \times \cancel{3}^2} = \frac{\overset{\text{チツテ}}{112}}{\underset{\text{トナニ}}{729}} \quad \text{となる}
 \end{aligned}$$

ア イ	$\frac{2}{3}$	2
ウ エ	$\frac{1}{3}$	2
オカ	56	2
キク	21	3
ケコ	35	3
サとし	2と6 または6と2	4*
$p^3 q^5$	$p^3 q^5$	2
ソタ	10	3
$\frac{\text{チツテ}}{\text{トナニ}}$	$\frac{112}{729}$	4

25点

*は、両方正解の場合は4点、片方のみ正解の場合は2点を与える。

数学I・数学A (100点満点)

問題 番号 (配点)	解答記号	正 解	配点	問題 番号 (配点)	解答記号	正 解	配点
第1問 (20)	ア－イ√ウ	$3 - 2\sqrt{2}$	2	第3問 (30)	アイ	35	2
	エ－√オ	$2 - \sqrt{3}$	2		ウエ	12	3
	カ√キ－ク√ケ	$8\sqrt{2} - 6\sqrt{3}$	2		オカ	$\frac{1}{2}$	3
	コ√サ－シ√ス	$4\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$	2		√キク	$\sqrt{21}$	3
	セ－ソ√タ	$6 - 2\sqrt{6}$	2		√ケ	$\sqrt{7}$	3
	チ	3	3		コ√サ	$5\sqrt{3}$	3
	ツ	4	2		シス°	90°	2
	テ	7	2		セソ°	90°	2
	ト	2	3		タ	7	3
第2問 (25)	$\frac{\text{アイ}}{\text{ウ}}$	$-\frac{1}{4}$	3	第4問 (25)	チ	2	3
	$\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$	$\frac{3}{4}$	2		ツ	7	3
	$\frac{\text{カキ}}{\text{ク}}$	$-\frac{3}{2}$	2		$\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$	$\frac{2}{3}$	2
	$\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$	$\frac{1}{2}$	2		$\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$	$\frac{1}{3}$	2
	$\frac{\text{サ}}{\text{シ}}$	$\frac{1}{2}$	3		オカ	56	2
	$\frac{\text{ス}}{\text{セ}}$	$\frac{3}{4}$	3		キク	21	3
	$\frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$	$\frac{1}{2}$	4		ケコ	35	3
	$\frac{\text{チ}}{\text{ツ}}$	$\frac{3}{2}$	4		サとシ	2^2 と 6^6 または6と2	4*
	テ, ト	2, 3	2		${}_p\text{ス}_q\text{セ}$	${}_p3_q5$	2
					ソタ	10	3
				(注) * は、両方正解の場合は4点、片方のみ正解の場合は2点を与える。			