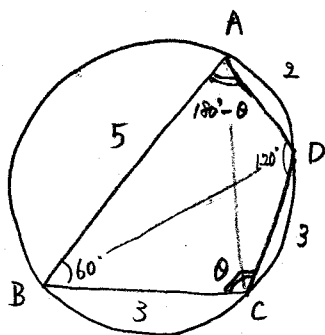




(1) $\angle ADC = 120^\circ$ より $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ で余弦定理から

$$\begin{cases} AC^2 = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ \\ AC^2 = 2^2 + CD^2 - 2 \times 2 \times CD \times \cos 120^\circ \end{cases} \text{ が成り立つので}$$

$$25 + 9 - 2 \times 15 \times \frac{1}{2} = 4 + CD^2 - 2 \times 2 \times CD \times \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ より}$$

$$34 - 15 = 4 + CD^2 + 2CD$$

$$CD^2 + 2CD - 15 = 0$$

$$(CD - 3)(CD + 5) = 0$$

$$CD > 0 \text{ より } \boxed{CD = 3}$$

(2) 求める面積を S とす

$$S = \triangle ABC + \triangle ADC$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 3 \times \sin 60^\circ + \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \times \sin 120^\circ$$

$$= \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{6}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\frac{21\sqrt{3}}{4}}$$

(3) $\angle BCD = \theta$ とおくと $\angle BAD = 180^\circ - \theta$ であり

$$\sin \theta = \sin (180^\circ - \theta) \text{ であることから}$$

$\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ の面積について

$$\triangle ABD : \triangle BCD = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 \times \sin (180^\circ - \theta) : \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin \theta$$

$$= 10 : 9 \text{ となる}$$

$$\therefore \triangle BCD = \frac{9}{19} S = \frac{9}{19} \times \frac{21\sqrt{3}}{4} = \boxed{\frac{189\sqrt{3}}{76}}$$

(4) $\triangle BCD$ と $\triangle ABD$ で余弦定理より

$$\begin{cases} BD^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \times 3 \times 3 \cos \theta \\ BD^2 = 5^2 + 2^2 - 2 \times 5 \times 2 \cos (180^\circ - \theta) \end{cases} \text{ が成り立つので}$$

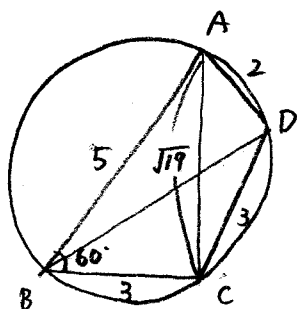
$$9 + 9 - 18 \cos \theta = 25 + 4 + 20 \cos \theta \text{ より}$$

$$-38 \cos \theta = 11$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{11}{38} \text{ となるので}$$

$$BD^2 = 9 + 9 - 18 \times \left(-\frac{11}{38}\right) = \frac{18 \times 19 + 99}{19} = \frac{9(2 \times 19 + 11)}{19} = \frac{9 \times 49}{19}$$

$$\therefore BD = \sqrt{\frac{9 \times 49}{19}} = \frac{3 \times 7}{\sqrt{19}} = \boxed{\frac{21\sqrt{19}}{19}} \text{ となる}$$



(4) (別解)

$$AC = 5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 60^\circ$$

$$= 25 + 9 - 15 = 19 \text{ より } AC = \sqrt{19} \text{ であり}$$

トレス - の定理

$$AC \times BD = AB \times CD + BC \times AD \text{ から}$$

$$\sqrt{19} \times BD = 5 \times 3 + 3 \times 2 \text{ より}$$

$$BD = \frac{21}{\sqrt{19}} = \boxed{\frac{21\sqrt{19}}{19}}$$