



$BC = a, CA = b, AB = c$ とおく

正弦定理より $2 \times 1 = \frac{a}{\sin 60^\circ}$ より

$$a = 2 \sin 60^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \boxed{\sqrt{3}}$$

$\triangle ABC$ の面積が $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ より

$$\frac{3+\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} bc \sin 60^\circ \quad \text{①から}$$

$$\frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{4} = \frac{1}{2} bc \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって $bc = \sqrt{3} + 1$ より

$$c = \frac{\sqrt{3}+1}{b} \quad \text{--- ① がなりたつ}$$

また、余弦定理より

$$(\sqrt{3})^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ \quad \text{がなりたつので}$$

$$3 = b^2 + c^2 - bc \quad \text{であり}$$

①を代入して $3 = b^2 + \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{b^2} - (\sqrt{3}+1)$ より

$$3b^2 = b^4 + (\sqrt{3}+1)^2 - (\sqrt{3}+1)b^2$$

$$b^4 - (\sqrt{3}+4)b^2 + (\sqrt{3}+1)^2 = 0$$

よって $b^2 = \frac{(\sqrt{3}+4) \pm \sqrt{(\sqrt{3}+4)^2 - 4(\sqrt{3}+1)^2}}{2}$

$$= \frac{(\sqrt{3}+4) \pm \sqrt{3+16+8\sqrt{3}-16-8\sqrt{3}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+4 \pm \sqrt{3}}{2} \quad \text{より}$$

$$b^2 = \sqrt{3}+2, \quad 2$$

ゆえに $b = \sqrt{\sqrt{3}+2}, \sqrt{2}$ より

$$b = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}, \sqrt{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}$$

$$b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}$$

$b = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ のとき $c = \frac{2(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2}$

$b = \sqrt{2}$ のとき $c = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ となるが

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{より} \quad b < c \quad \text{から} \quad b = \sqrt{2}, \quad c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \quad \text{となる}$$

以上のことから $\boxed{AB = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \quad BC = \sqrt{3}, \quad CA = \sqrt{2}}$ となる