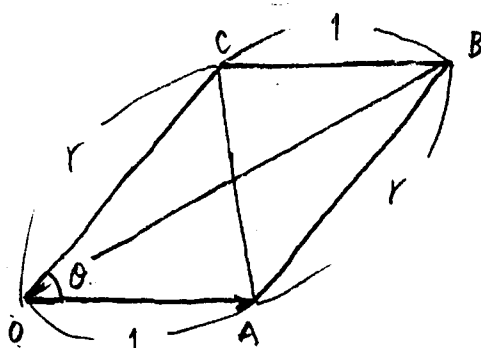




(1) $\triangle OAC$ で余弦定理より

$$AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \cdot OC \cos \theta \quad \text{かゝりたつから}$$

$$AC^2 = 1^2 + r^2 - 2 \times 1 \times r \times \cos \theta \quad \text{--- ①}$$

かゝりたつ

また

$\triangle OAB$ で余弦定理より

$$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2OA \cdot AB \cos (180^\circ - \theta) \quad \text{かゝりたつから}$$

$$OB^2 = 1^2 + r^2 + 2 \times 1 \times r \times \cos \theta \quad \text{--- ②} \quad \text{かゝりたつ}$$

①+②より $\boxed{OB^2 + AC^2 = 2 + 2r^2}$ となり θ によらず一定となる。
③

(2) ①②より $OB \cdot AC = \sqrt{(1+r^2+2r\cos\theta)(1+r^2-2r\cos\theta)}$
 $= \sqrt{(1+r^2)^2 - (2r\cos\theta)^2}$
 $= \sqrt{1+2r^2+r^4 - 4r^2\cos^2\theta} \quad \text{--- ④} \quad \text{となる}$

また $(OB+AC)^2 = OB^2 + AC^2 + 2OB \cdot AC$ かゝりたつから

③④より $(OB+AC)^2 = 2 + 2r^2 + 2\sqrt{1+2r^2+r^4 - 4r^2\cos^2\theta} \quad \text{--- ⑤} \quad \text{となる}$

(1)より $OB^2 + AC^2$ の値は θ によらず一定なので

$OB \cdot AC$ の値が最大るとき ⑤の値は最大となる

こゝで $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ より $\cos^2\theta = 0$

即ち $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$ のとき ⑤の値は最大となる

そのとき $(OB+AC)^2 = 2 + 2r^2 + 2\sqrt{1+2r^2+r^4}$
 $= 2 + 2r^2 + 2\sqrt{(1+r^2)^2}$
 $= 2 + 2r^2 + 2|1+r^2|$
 $= 2 + 2r^2 + 2(1+r^2)$
 $= 4(1+r^2) \quad \text{より}$

$OB+AC$ の最大値は $2\sqrt{1+r^2}$
 $(\theta = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \quad \text{となる}$