$ax^2+\frac{y^2}{2a}=1$ の両辺を y を x で微分すると

$2ax+\frac{2y}{2a}y'=0$ であり、

$y\neq 0$ のとき、 $y'=-\frac{a}{y}\cdot 2ax=-2a^2\cdot\frac{x}{y}$ である.

ここで接点を (p, q) (但し $q\neq 0$) とすると接線の式は

$$y=-2a^2\cdot\frac{p}{q}(x-p)+q \quad \text{より}$$

$$qy=-2a^2px+2a^2p^2+q^2$$

$$2a^2px+qy=2a^2p^2+q^2 \quad \text{—①となる}$$

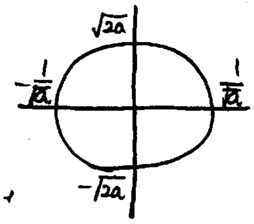
ここで (p, q) は $ax^2+\frac{y^2}{2a}=1$ 上の点より

$ap^2+\frac{q^2}{2a}=1$ がなりたつので

$2a^2p^2+q^2=2a$ であるから

①は $2a^2px+qy=2a$ より

$a\neq 0$ から $apx+\frac{q}{2a}y=1$ —② となる

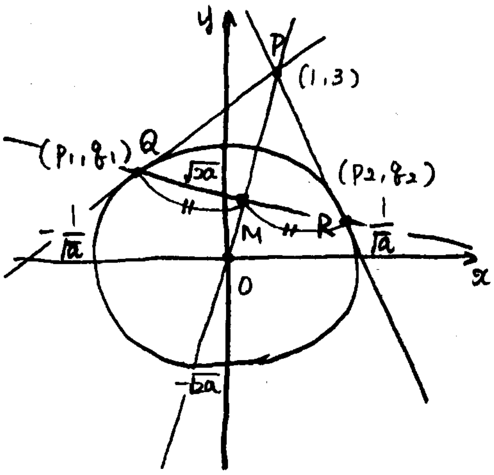


$y=0$ のとき、接点 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right)$ なら 接線 $x=\frac{1}{\sqrt{a}}$

接点 $\left(-\frac{1}{\sqrt{a}}, 0\right)$ なら 接線 $x=-\frac{1}{\sqrt{a}}$ であるが

これは②に含まれる.

よって接点 (p, q) のときの接線の式は $\boxed{apx+\frac{q}{2a}y=1}$ —② である



$Q(p_1, q_1)$, $R(p_2, q_2)$ とすると

2つの接線の式はそれぞれ②より

$$\begin{cases} ap_1x+\frac{q_1}{2a}y=1 & \text{—③} \\ ap_2x+\frac{q_2}{2a}y=1 & \text{—④} \end{cases}$$

となり、どちらも $P(1, 3)$ を通るから

$$\begin{cases} ap_1+\frac{3}{2a}q_1=1 & \text{—⑤} \\ ap_2+\frac{3}{2a}q_2=1 & \text{—⑥} \end{cases}$$

がなりたつ。

ここで直線 $ax+\frac{3}{2a}y=1$ を考えると⑤⑥より、

この直線は2点 (p_1, q_1), (p_2, q_2) を通っている.

よって QR を通る直線は $\underset{チ}{\boxed{a}}x+\underset{ツ}{\boxed{\frac{3}{2a}}}y=1$ となる

QRの中点Mは $\left(\frac{p_1+p_2}{2}, \frac{q_1+q_2}{2}\right)$ であり、これは $ax+\frac{3}{2a}y=1$ 上にあるから

$$a\cdot\frac{p_1+p_2}{2}+\frac{3}{2a}\cdot\frac{q_1+q_2}{2}=1 \quad -⑦$$ をみたす。

また、$ax^2+\frac{y^2}{2a}=1$ と $\underbrace{ax+\frac{3}{2a}y=1}_{②}$ を連立にすると

②は $y=\frac{2a}{3}(1-ax)$ より だ円の式は

$ax^2+\frac{1}{2a}\times\frac{(2a)^2}{9}(1-ax)^2=1$ より

$9ax^2+2a(1-ax)^2-9=0$

$(9a+2a^3)x^2-4a^2x+2a-9=0$

この2つの解が p_1, p_2 であるから 解と係数の関係より

$$p_1+p_2=\frac{4a^2}{9a+2a^3}=\frac{4a}{9+2a^2}$$

よって Mの x座標は $\boxed{\frac{2a}{9+2a^2}}$ テ となる

また y座標は $a\times\frac{2a}{9+2a^2}+\frac{3}{2a}y=1$ より

$$y=\frac{2a}{3}\left(1-\frac{2a^2}{9+2a^2}\right)$$

$$=\frac{2a}{3}\left(\frac{9+2a^2-2a^2}{9+2a^2}\right)$$

$$=\frac{2a}{3}\times\frac{9}{9+2a^2}=\boxed{\frac{6a}{9+2a^2}}\ ト$$

よって Mの座標は $\left(\frac{2a}{9+2a^2}, \frac{6a}{9+2a^2}\right)$ となるから

直線 $y=\overset{ナ}{\boxed{3}}x$ 上にある。

ここで PQ=PRのとき PM=MR より △PQRは PQ=PRの二等辺三角形だから

PM⊥QRである。

よって $3x-y=0$ と $ax+\frac{3}{2a}y=0$ が垂直に交わるので

$3a+(-1)\times\frac{3}{2a}=0$ より

$6a^2=3$

$a^2=\frac{1}{2}$ $\quad a>0$ より $\quad a=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$ ニ となる

$\overrightarrow{OM} = \dfrac{2a}{9+2a^2}(1, 3)$ であるから $|\overrightarrow{OM}| = \dfrac{2a}{9+2a^2} \times \sqrt{10}$

また $\overrightarrow{OP} = (1, 3)$ より $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{10}$

よって $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{OP}| - |\overrightarrow{OM}| = \left(1 - \dfrac{2a}{9+2a^2}\right)\sqrt{10}$

$= \dfrac{9+2a^2-2a}{9+2a^2}\sqrt{10}$ となるので

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{OM}|} = \frac{\dfrac{9+2a^2-2a}{9+2a^2}\sqrt{10}}{\dfrac{2a}{9+2a^2}\sqrt{10}} = \underset{ヌ}{\boxed{\frac{9+2a^2-2a}{2a}}}$$ であり

a も $\dfrac{1}{a}$ も正であるから

$\dfrac{S_1}{S_2} = a + \dfrac{9}{2a} - 1 \geqq 2\sqrt{a \times \dfrac{9}{2a}} - 1 = 3\sqrt{2} - 1$ がなりたつ

(等号は $a = \dfrac{9}{2a}$ のとき，即ち $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき)

ゆえに $\dfrac{S_1}{S_2}$ は $a = \underset{ネ}{\boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}}$ のとき 最小値 $\underset{ノ}{\boxed{3\sqrt{2}-1}}$ をとる