

## 数学Ⅱ・数学B (100点満点)

Ⓕ

| 問題<br>番号<br>(配点) | 解答記号              | 正 解               | 配点 | 問題<br>番号<br>(配点)                               | 解答記号               | 正 解               | 配点 |
|------------------|-------------------|-------------------|----|------------------------------------------------|--------------------|-------------------|----|
| 第1問<br>(30)      | ア                 | 2                 | 1  | (第3問)                                          | ナ,ニ,ヌ,ネ            | 4,2,2,1           | 2  |
|                  | イ                 | 8                 | 1  | 第4問<br>(20)                                    | ア                  | 2                 | 1  |
|                  | ウエ,オカ             | 17,66             | 2  |                                                | $\frac{イ}{ウ}$      | $\frac{3}{4}$     | 1  |
|                  | キ                 | 0                 | 3  |                                                | エ,オ,カ              | 1,2,1             | 3  |
|                  | ク                 | 6                 | 2  |                                                | $\frac{キ}{ク}$      | $\frac{2}{3}$     | 2  |
|                  | ケ                 | 8                 | 2  |                                                | $\frac{ケ}{コ}$      | $\frac{2}{3}$     | 2  |
|                  | コ                 | 2                 | 2  |                                                | $\frac{サ}{シ}$ ,ス,セ | $\frac{1}{3},2,2$ | 1  |
|                  | サ                 | 6                 | 2  |                                                | ソ                  | 2                 | 1  |
|                  | シ                 | 6                 | 1  |                                                | タ                  | 3                 | 2  |
|                  | ス                 | 5                 | 1  |                                                | チ, $\frac{ツ}{テ}$   | $2, \frac{16}{3}$ | 2  |
|                  | セ,ソ               | 4,2               | 2  |                                                | $\frac{ナ}{ニ}$      | $\frac{3}{2}$     | 3  |
|                  | タ                 | 3                 | 1  |                                                | $\frac{ヌ}{ネ}$      | $\frac{1}{3}$     | 2  |
|                  | チ,ツ               | 4,2               | 2  | 第5問<br>(20)                                    | ア                  | 5                 | 1  |
|                  | テ                 | 5                 | 1  |                                                | イ                  | 8                 | 1  |
|                  | $\frac{ト}{ナ}$     | $\frac{3}{8}$     | 2  |                                                | ウ,エ                | 5,0               | 1  |
|                  | $\frac{ニヌ}{ネ}$    | $\frac{11}{8}$    | 2  |                                                | オ,カキ               | 1,60              | 2  |
|                  | $\frac{ノ}{ハヒ}$    | $\frac{3}{22}$    | 2  |                                                | ク                  | 5                 | 1  |
|                  | フ                 | 1                 | 1  |                                                | ケ,コサシ              | 0.625             | 3  |
| 第2問<br>(30)      | ア,イ,ウ             | 2,2,3             | 3  |                                                | スセソ                | 282               | 1  |
|                  | エ,オ               | 2,2               | 2  |                                                | タ                  | 8                 | 1  |
|                  | カキ,ク              | -2,2              | 3  |                                                | チツ                 | 42                | 1  |
|                  | ケコ,サ              | -2,2              | 1  |                                                | テ,ト,ナ              | 4,2,2             | 2  |
|                  | シ                 | 0                 | 2  |                                                | ニ,ヌ                | 5,1               | 2  |
|                  | ス                 | 0                 | 2  |                                                | ネ,ノ                | 5,0               | 2  |
|                  | $\frac{セ}{ソ}$     | $\frac{1}{3}$     | 2  |                                                | ハ                  | 5                 | 1  |
|                  | $\frac{タ}{チツ}$    | $\frac{1}{27}$    | 2  |                                                | ヒ                  | 3                 | 1  |
|                  | テ                 | 3                 | 3  | 第6問<br>(20)                                    | ア                  | 1                 | 2  |
|                  | ト                 | 0                 | 2  |                                                | イ                  | 2                 | 2  |
|                  | $\frac{ナ}{ニ}$     | $\frac{4}{9}$     | 3  |                                                | ウ                  | 4                 | 2  |
|                  | ヌ,ネ,ノ             | 4,10              | 5  |                                                | エ                  | 5                 | 2  |
| 第3問<br>(20)      | $\frac{アイ}{ウ}$    | $-\frac{1}{3}$    | 1  |                                                | オ                  | 5                 | 1  |
|                  | エオ                | -2                | 1  |                                                | カ                  | 4                 | 1  |
|                  | カキ, $\frac{ク}{ケ}$ | $-2, \frac{5}{3}$ | 2  |                                                | キ                  | 0                 | 2  |
|                  | コ, $\frac{サ}{シ}$  | $-, \frac{2}{3}$  | 2  |                                                | ク                  | 4                 | 1  |
|                  | ス                 | 1                 | 2  |                                                | ケ                  | 5                 | 2  |
|                  | セ                 | 4                 | 2  |                                                | コ                  | 3                 | 2  |
|                  | ソ,タ               | 6,1               | 2  |                                                | サ                  | 2                 | 1  |
|                  | チ                 | 2                 | 2  |                                                | シ                  | 2                 | 2  |
|                  | ツ                 | 1                 | 2  | (注) 第1問, 第2問は必答, 第3問~第6問のうちから<br>2問選択, 計4問を解答。 |                    |                   |    |
|                  | テ                 | 4                 | 1  |                                                |                    |                   |    |
|                  | ト                 | 4                 | 1  |                                                |                    |                   |    |

真数は正だから  $8-x > 0$  かつ  $x-2 > 0$  より  $\boxed{2} < x < \boxed{8}$   
ア 1

このとき  $2 \log_a (8-x) > \log_a (x-2)$  — ①は

$$\log_a (8-x)^2 > \log_a (x-2) \text{ であり}$$

$0 < a < 1$  のとき  $(8-x)^2 < (x-2)$  より

$$x^2 - 16x + 64 < x - 2$$

$$x^2 - \boxed{17}x + \boxed{66} < 0$$

ウエ オカ キ②

よって  $(x-11)(x-6) < 0$  より

$$6 < x < 11 \text{ となるが}$$

真数条件より ①の解は  $\boxed{6} < x < \boxed{8}$  となる  
ク ケ

また  $a > 1$  のときは  $(8-x)^2 > (x-2)$  より

$$(x-11)(x-6) > 0 \text{ だから}$$

$$x < 6, 11 < x \text{ となるが}$$

真数条件より ①の解は  $\boxed{2} < x < \boxed{6}$  となる  
コ サ

解答記号 正解 配点

|        |        |   |
|--------|--------|---|
| ア      | 2      | 1 |
| イ      | 8      | 1 |
| ウエ, オカ | 17, 66 | 2 |
| キ      | 0      | 3 |
| ク      | 6      | 2 |
| ケ      | 8      | 2 |
| コ      | 2      | 2 |
| サ      | 6      | 2 |

15点

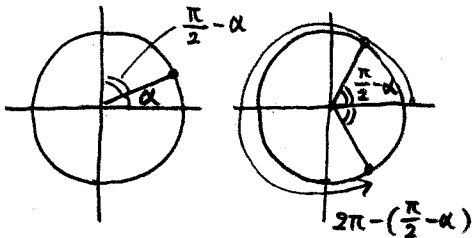
$$\sin \alpha = \cos 2\beta \quad (0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi) \text{ において}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \text{ のとき } \cos 2\beta = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$0 \leq 2\beta \leq 2\pi \text{ で求めるので } 2\beta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi \text{ である}$$

$$\beta = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \text{ となる}$$

$$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ のときは}$$



$$\sin \alpha = \cos 2\beta \text{ は}$$

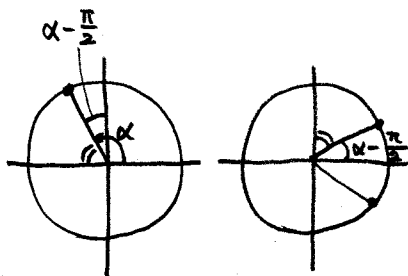
$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos 2\beta \text{ より}$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, 2\pi - (\frac{\pi}{2} - \alpha) \text{ であるから}$$

$$2\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{3}{2}\pi + \alpha$$

$$\text{よって } \beta_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}, \beta_2 = \frac{3}{4}\pi + \frac{\alpha}{2} \text{ となる}$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \text{ のときは}$$



$$\sin \alpha = \cos 2\beta \text{ は}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos 2\beta \text{ より}$$

$$\cos\{-(\alpha - \frac{\pi}{2})\} = \cos 2\beta$$

$$\cos(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \cos 2\beta$$

$$\text{よって } 2\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, 2\pi - (\alpha - \frac{\pi}{2}) \text{ であるから}$$

$$2\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}, \frac{5}{2}\pi - \alpha$$

$$\beta_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}, \beta_2 = \frac{5}{4}\pi - \frac{\alpha}{2} \text{ となる}$$

$$\text{したがって (i) } 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ のとき } \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \alpha + (\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{4}) + (\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{6}) \\ = \frac{11}{12}\alpha + \frac{3}{8}\pi$$

$$\text{よって } \frac{3}{8}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} < \frac{3}{8}\pi + \frac{11}{24}\pi = \frac{20}{24}\pi = \frac{5}{6}\pi$$

$$(ii) \frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi \text{ のとき } \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \alpha + (-\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{4}) + (\frac{5}{12}\pi - \frac{\alpha}{6}) = \frac{13}{12}\alpha + \frac{7}{24}\pi$$

$$\text{よって } \frac{13}{24}\pi + \frac{7}{24}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{13}{12}\pi + \frac{7}{24}\pi \text{ より}$$

$$\frac{5}{6}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{33}{24}\pi = \frac{11}{8}\pi$$

$$\frac{3}{8}\pi \leq \alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} \leq \frac{11}{8}\pi \quad \text{となる}$$

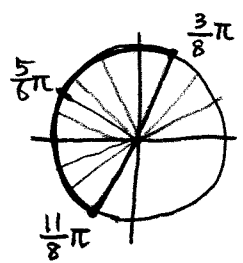
よって  $y = \sin\left(\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3}\right)$  が最大となる  $\alpha$  の値は

$$\alpha + \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{3} = \frac{\pi}{2} \quad \text{のときより}$$

$$\text{①のときであり} \quad \frac{11}{12}\alpha + \frac{3}{8}\pi = \frac{\pi}{2} \quad \text{だから}$$

$$\frac{11}{12}\alpha = \frac{\pi}{8}$$

$$\text{よって} \quad \alpha = \frac{12}{11} \times \frac{\pi}{8} = \frac{3}{22}\pi$$



そのときの  $y$  の値は  $\boxed{1}$  となる  
 ①

解答記号 正解 配点

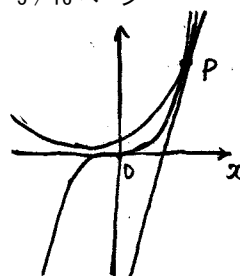
|       |      |   |
|-------|------|---|
| シ     | 6    | 1 |
| ス     | 5    | 1 |
| セ、ソ   | 4,2  | 2 |
| タ     | 3    | 1 |
| チ、ツ   | 4,2  | 2 |
| テ     | 5    | 1 |
| ト、ナ   | 3,5  | 2 |
| ニ、ヌ   | 11,8 | 2 |
| ノ、ハ、ヘ | 3,22 | 2 |
| フ     | 1    | 1 |

15点

(1)  $y = x^3$  のとき  $y' = 3x^2$  より  $P(a, a^3)$  における接線は

$$y = 3a^2(x-a) + a^3 \text{ より}$$

$$y = 3a^2x - \boxed{2}a^3 \text{ --- (A) である}$$



ここで、 $y = x^2 + px + q$  において  $y' = 2x + p$  より

$x = a$  における接線の傾きが (A) の傾きと等しいので

$$2a + p = 3a^2 \text{ より}$$

$$p = 3a^2 - \boxed{2}a$$

また、 $x = a$  での  $y$  座標が  $a^3$  より

$$a^2 + pa + q = a^3 \text{ だから}$$

$$a^2 + (3a^2 - 2a)a + q = a^3$$

$$\text{よって } q = \boxed{-2}a^3 + a^{\boxed{2}} \text{ となる}$$

(2)  $y = x^2 + px + q$  が  $(0, b)$  を通るとき  $b = q = \boxed{-2}a^3 + a^{\boxed{2}} \text{ である}$

ここで  $f(x) = -2x^3 + x^2$  とおくと

$$f'(x) = -6x^2 + 2x$$

$$= -6x(x - \frac{1}{3}) \text{ より}$$

増減表は下ようになる

|         |     |   |     |                |     |
|---------|-----|---|-----|----------------|-----|
| $x$     | ... | 0 | ... | $\frac{1}{3}$  | ... |
| $f'(x)$ | -   | 0 | +   | 0              | -   |
| $f(x)$  | ↘   | 0 | ↗   | $\frac{1}{27}$ | ↘   |

$$f(\frac{1}{3}) = -2 \times \frac{1}{27} + \frac{1}{9} = \frac{-2+3}{27} = \frac{1}{27}$$

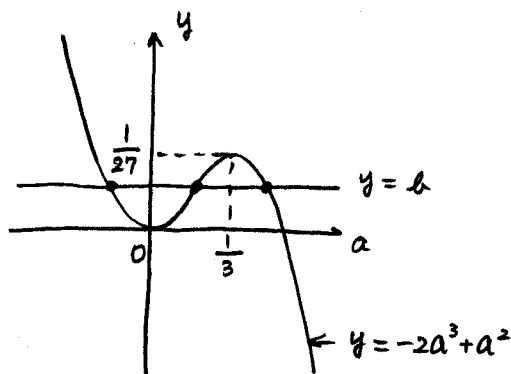
よって  $x = \boxed{0}$  で 極小値  $\boxed{0}$  をとり

$x = \boxed{\frac{1}{3}}$  で 極大値  $\boxed{\frac{1}{27}}$  をとる。

ゆえに  $0 < b < \frac{1}{27}$  のとき

$b = -2a^3 + a^2$  をみにす  $a$  の値の個数は 右上のグラフの共有点の個数と一致するから  $\boxed{3}$  個となる

テ



(3)  $D: y = x^2 + px + q$  の頂点が  $x$  軸上にあるとき

$x^2 + px + q = 0$  の判別式を  $D$  とすると  $D = 0$  より

$$D = p^2 - 4q = 0 \text{ だから}$$

$$(3a^2 - 2a)^2 - 4(-2a^3 + a^2) = 0 \text{ より}$$

$$9a^4 - 12a^3 + 4a^2 + 8a^3 - 4a^2 = 0$$

$$9a^4 - 4a^3 = 0$$

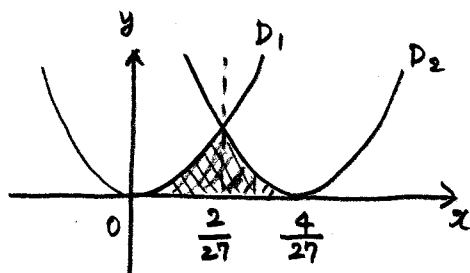
$$\text{よって } 9a^3(a - \frac{4}{9}) = 0 \text{ より}$$

$$a = \underset{\text{ト}}{\boxed{0}}, \underset{\text{ナ}}{\boxed{\frac{4}{9}}} \text{ となる}$$

このとき  $D$  は  $y = x^2 + (3a^2 - 2a)x + (-2a^3 + a^2)$  であり

$$a = 0 \text{ のとき } y = x^2 \dots D_1$$

$$\begin{aligned} a = \frac{4}{9} \text{ のとき } y &= x^2 + \left(3 \times \frac{16}{81} - 2 \times \frac{4}{9}\right)x + \frac{16}{81}(-2 \times \frac{4}{9} + 1) \\ &= x^2 - \frac{8}{27}x + \frac{16}{81} \times \frac{1}{9} \\ &= \left(x - \frac{4}{27}\right)^2 \dots D_2 \end{aligned}$$



よって  $D_1, D_2$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積は  
 $x = \frac{2}{27}$  で対称であることを利用して

$$\begin{aligned} &2 \int_0^{\frac{2}{27}} x^2 dx \\ &= 2 \times \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{2}{27}} \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{2^3}{27^3} = \frac{2^4}{3 \times (3^3)^3} = \frac{2^4}{3 \times 10^3} \text{ となる} \end{aligned}$$

解答記号 正解 配点

|         |                |   |
|---------|----------------|---|
| ア, イ, ウ | 2, 2, 3        | 3 |
| エ, オ    | 2, 2           | 2 |
| カキ, ク   | -2, 2          | 3 |
| ケコ, サ   | -2, 2          | 1 |
| シ       | 0              | 2 |
| ス       | 0              | 2 |
| セ, ソ    | $\frac{1}{3}$  | 2 |
| タ, チツ   | $\frac{1}{27}$ | 2 |
| チ       | 3              | 3 |
| ト       | 0              | 2 |
| ナ       | $\frac{4}{9}$  | 3 |
| ヌ, ノ    | 4, 10          | 5 |

公差を  $d$  とすると  $a_2 + 3d = a_5$  より

$$-\frac{7}{3} + 3d = -\frac{25}{3}$$

$$3d = -\frac{18}{3}$$

$$\therefore d = -\frac{18}{9} = \boxed{-2}$$

$$a_1 = a_2 - d = -\frac{7}{3} + 2 = \boxed{\frac{-1}{3}} \text{ 71 } \text{ 753}$$

$$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = -\frac{1}{3} - 2(n-1)$$

$$= \boxed{-2}n + \boxed{\frac{5}{3}} \text{ 7 } \text{ 75}$$

カキ

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \left(-2k + \frac{5}{3}\right)$$

$$= -2 \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{5}{3}n$$

$$= -n^2 - n + \frac{5}{3}n$$

$$= \boxed{-}n^2 + \boxed{\frac{2}{3}}n \text{ 7 } \text{ 75}$$

コ

$$\because \sum_{k=1}^n b_k = \frac{4}{3}b_n + S_n \quad \text{--- ①} \quad \text{左みたすとき}$$

$$\sum_{k=1}^n b_k = \frac{4}{3}b_n - n^2 + \frac{2}{3}n \quad \text{より} \quad \text{--- ①'}$$

$$n=1 \text{ のとき } b_1 = \frac{4}{3}b_1 - 1^2 + \frac{2}{3} \quad \text{から}$$

$$-\frac{1}{3}b_1 = -\frac{1}{3} \quad \therefore b_1 = \boxed{1}^2$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n+1} b_k = \sum_{k=1}^n b_k + b_{n+1} = \frac{4}{3}b_{n+1} - (n+1)^2 + \frac{2}{3}(n+1) \quad \text{--- ①''}$$

$$\therefore \text{①''} - \text{①'} \text{ より } b_{n+1} = \frac{4}{3}b_{n+1} - \frac{4}{3}b_n - 2n - 1 + \frac{2}{3} \quad \text{だから}$$

$$-\frac{1}{3}b_{n+1} = -\frac{4}{3}b_n - 2n - \frac{1}{3}$$

$$b_{n+1} = \boxed{4}b_n + \boxed{6}n + \boxed{1} \quad \text{753}$$

セ                      ヴ                      9

これが  $b_{n+1} + p(n+1) + q = 4(b_n + pn + q)$  をみたすとする

$$b_{n+1} = 4b_n + 3pn - p + 3q \quad \text{より}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3p = 6 \\ -p + 3q = 1 \end{array} \right. \quad \text{をみたすから}$$

$$p = 2 \text{ あり}$$

$$-2 + 3q = 1 \text{ より}$$

$$3q = 3 \quad \text{よって } q = 1 \text{ となる}$$

よって  $\{b_n\}$  は  $b_{n+1} + \underset{\text{チ}}{2}(n+1) + \underset{\text{ツ}}{1} = 4(b_n + 2n + 1)$  をみたす。

$$C_n = b_n + 2n + 1 \text{ とおくと } \text{---} \text{②}$$

$$C_{n+1} = 4C_n \text{ より}$$

$\{C_n\}$  は 公比  $\underset{\text{ト}}{4}$  , 初項  $C_1 = b_1 + 2 \times 1 + 1$   
 $= 1 + 2 + 1 = \underset{\text{テ}}{4}$  の等比数列だから

$$C_n = 4 \times 4^{n-1} = 4^n \text{ より}$$

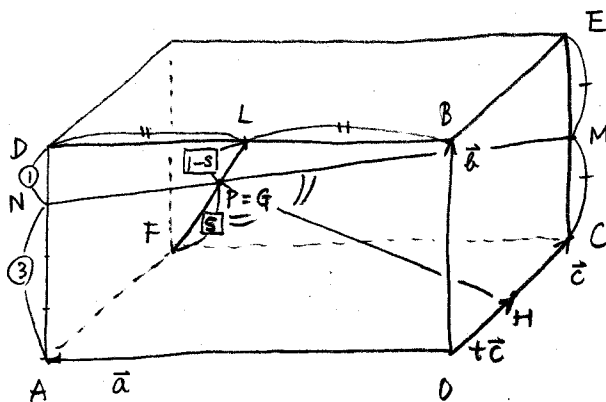
$$b_n = C_n - 2n - 1$$

$$= \underset{\text{ナ}}{4} \overset{\text{②}}{n} - \underset{\text{ヌ}}{2}n - \underset{\text{ネ}}{1} \quad \text{となる}$$

解答記号 正解 配点

|                   |                |   |
|-------------------|----------------|---|
| アイ                | $-\frac{1}{3}$ | 1 |
| エオ                | -2             | 1 |
| カキ, $\frac{2}{3}$ | $-\frac{5}{3}$ | 2 |
| コ, $\frac{4}{3}$  | $-\frac{2}{3}$ | 2 |
| ス                 | 1              | 2 |
| セ                 | 4              | 2 |
| ソ, タ              | 6, 1           | 2 |
| チ                 | 2              | 2 |
| ツ                 | 1              | 2 |
| テ                 | 4              | 1 |
| ト                 | 4              | 1 |
| ナ, ニ, ヌ, ネ        | 4, 2, 2, 1     | 2 |

20点



$$\begin{aligned} (1) \vec{OM} &= \vec{OC} + \vec{CM} \\ &= \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{ON} &= \vec{OA} + \vec{AN} \\ &= \vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b} \end{aligned}$$

(2)  $FP:PL = s:(1-s)$  とすると

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= (1-s) \vec{OF} + s \vec{OL} \\ &= (1-s) (\vec{a} + \vec{c}) + s (\vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a}) \\ &= (\frac{1}{2} - \frac{s}{2}) \vec{a} + s \vec{b} + (\frac{1}{2} - s) \vec{c} \quad \text{となる。} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{ON} - \vec{OM} = (\vec{a} + \frac{3}{4} \vec{b}) - (\vec{c} + \frac{1}{2} \vec{b}) \\ &= \vec{a} + \frac{1}{4} \vec{b} - \vec{c} \quad \text{であり} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{MP} &= \vec{OP} - \vec{OM} = (1 - \frac{s}{2}) \vec{a} + s \vec{b} + (1-s) \vec{c} - (\vec{c} + \frac{1}{2} \vec{b}) \\ &= (1 - \frac{s}{2}) \vec{a} + (s - \frac{1}{2}) \vec{b} - s \vec{c} \end{aligned}$$

ここで  $\vec{MP} = k \vec{MN}$  とおくと

$$(1 - \frac{s}{2}) \vec{a} + (s - \frac{1}{2}) \vec{b} - s \vec{c} = k \vec{a} + \frac{k}{4} \vec{b} - k \vec{c} \quad \text{より}$$

$$\begin{cases} 1 - \frac{s}{2} = k & \text{--- ①} \\ s - \frac{1}{2} = \frac{k}{4} & \text{--- ②} \\ -s = -k & \text{--- ③} \end{cases} \quad \text{がなりたつ$$

③より  $s = k$  であり ①より  $1 - \frac{k}{2} = k$  だから

$$\frac{3}{2} k = 1 \quad \text{よって } k = \frac{2}{3}$$

②より  $k - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} k$  だから

$$\frac{3}{4} k = \frac{1}{2} \quad \text{よって } k = \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

ゆえに  $s = \frac{2}{3}$  のとき  $\vec{MP} = \frac{2}{3} \vec{MN}$  となるので  $M, N, P$  は一直線上にある

(3)  $P=G$  であるから

$$\vec{OG} = \left(1 - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right) \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) \vec{c}$$

$$= \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c}$$

$$= \frac{1}{3} \left( \overset{\text{ア}}{\boxed{2}} \vec{a} + \underset{\text{イ}}{\boxed{2}} \vec{b} + \vec{c} \right)$$

$$\vec{GF} = \vec{OF} - \vec{OG}$$

$$= (\vec{a} + \vec{c}) - \left( \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{2}{3} \vec{b} + \frac{1}{3} \vec{c} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \vec{a} - \frac{2}{3} \vec{b} + \frac{2}{3} \vec{c}$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{a} - 2\vec{b} + \underset{\text{ウ}}{\boxed{2}} \vec{c})$$

$|\vec{a}| = \sqrt{5}$ ,  $|\vec{b}| = 4$ ,  $|\vec{c}| = \sqrt{3}$  のとき  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$  も利用すると

$$|\vec{GF}|^2 = \frac{1}{9} |\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}|^2$$

$$= \frac{1}{9} (|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 4|\vec{c}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b} \cdot \vec{c} + 4\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$= \frac{1}{9} (5 + 4 \times 16 + 4 \times 3)$$

$$= \frac{1}{9} \times 81 = 9 \quad \text{よって } |\vec{GF}| = \overset{\text{エ}}{\boxed{3}}$$

また  $|\vec{GM}| = 2$  とおき、

$$\vec{OM} = t\vec{c} \text{ のとき } \vec{GF} \cdot \vec{GM} = \frac{1}{3} (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (\vec{OM} - \vec{OG})$$

$$= \frac{1}{3} (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \left\{ t\vec{c} - \frac{1}{3} (2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}) \right\}$$

$$= \frac{1}{9} (\vec{a} - 2\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot \{ -2\vec{a} - 2\vec{b} + (3t-1)\vec{c} \}$$

$$= \frac{1}{9} \{ -2|\vec{a}|^2 + 4|\vec{b}|^2 + 2(3t-1)|\vec{c}|^2 \}$$

$$= \frac{1}{9} \{ -2 \times 5 + 4 \times 16 + 2(3t-1) \times 3 \}$$

$$= \frac{1}{9} (18t + 48)$$

$$= \underset{\text{カ}}{\boxed{2}} t + \underset{\text{キ}}{\boxed{\frac{16}{3}}} \quad \text{--- ①}$$

$$\text{同様に } \vec{GM} \cdot \vec{GH} = 2t + \frac{10}{3} \quad \text{--- ②}$$

$$\angle FGH = \angle MGH = \theta \text{ のとき}$$

$$|\vec{GF}| = 3, |\vec{GM}| = 2 \text{ であるから}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{GF} \cdot \vec{GH}}{|\vec{GF}| |\vec{GH}|} = \frac{\vec{GM} \cdot \vec{GH}}{|\vec{GM}| |\vec{GH}|} \text{ より}$$

$$\frac{\vec{GF} \cdot \vec{GH}}{3} = \frac{\vec{GM} \cdot \vec{GH}}{2} \text{ である}$$

$$\vec{GF} \cdot \vec{GH} = \boxed{\frac{3}{2}} \vec{GM} \cdot \vec{GH} \quad - \textcircled{3} \text{ が必要}$$

①②③より

$$2t + \frac{16}{3} = \frac{3}{2} \left( 2t + \frac{10}{3} \right) \text{ である}$$

$$2t + \frac{16}{3} = 3t + 5$$

$$t = \frac{16}{3} - 5 = \boxed{\frac{1}{3}} \text{ である}$$

解答記号 正解 配点

|         |                     |   |
|---------|---------------------|---|
| ア       | 2                   | 1 |
| イ       | $\frac{3}{4}$       | 1 |
| エ, オ, カ | 1, 2, 1             | 3 |
| キ       | $\frac{2}{3}$       | 2 |
| ク       | $\frac{2}{3}$       | 2 |
| サ, ス, セ | $\frac{1}{3}, 2, 2$ | 1 |
| ソ       | 2                   | 1 |
| タ       | 3                   | 2 |
| チ, ツ, テ | 2, $\frac{16}{3}$   | 2 |
| ナ       | $\frac{3}{2}$       | 3 |
| ネ       | $\frac{1}{3}$       | 2 |

20点

(1) 国語が4点の生徒は  $\overset{P}{\boxed{5}}$  人であり

英語が国語の得点以下の生徒は  $1+1+2+1+1+2 = \underset{1}{\boxed{8}}$  (人) である

(2)

|          |   |    |    |    |    |   |
|----------|---|----|----|----|----|---|
| 国語の点     | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8 |
| 人数       | 2 | 5  | 8  | 2  | 2  | 1 |
| (点)×(人数) | 6 | 20 | 40 | 12 | 14 | 8 |

$$\begin{aligned} \text{国語の平均点は } & \frac{6+20+40+12+14+8}{20} \\ & = \frac{100}{20} = \underset{\text{ウエ}}{\boxed{5.0}} \text{ (点)} \end{aligned}$$

|                        |   |    |    |     |     |     |
|------------------------|---|----|----|-----|-----|-----|
| 英語の点                   | 3 | 4  | 5  | 6   | 7   | 8   |
| (英語の点) <sup>2</sup>    | 9 | 16 | 25 | 36  | 49  | 64  |
| 人数                     | 1 | 2  | 2  | 8   | 5   | 2   |
| (点)×(人数)               | 3 | 8  | 10 | 48  | 35  | 16  |
| (点) <sup>2</sup> ×(人数) | 9 | 32 | 50 | 288 | 245 | 128 |

$$\begin{aligned} \text{よって英語の分散は } & (\text{英語点の2乗平均}) - (\text{平均})^2 \\ & = \frac{9+32+50+288+245+128}{20} - \left( \frac{3+8+10+48+35+16}{20} \right)^2 \\ & = \frac{752}{20} - \left( \frac{120}{20} \right)^2 \\ & = \frac{376}{10} - 36 \\ & = 37.6 - 36 = \underset{\text{オカキ}}{\boxed{1.60}} \end{aligned}$$

(3) 国語が5点以外かつ英語が6点以外の生徒は  $\underset{ク}{\boxed{5}}$  人

国語、英語の平均をそれぞれ  $\bar{J}$ ,  $\bar{E}$  とすると

$$\begin{aligned}
 (\text{相関係数}) &= \frac{\frac{1}{20} \sum (\text{国語の点} - \bar{J})(\text{英語の点} - \bar{E})}{\sqrt{(\text{国語の分散}) \times (\text{英語の分散})}} \\
 &= \frac{\frac{1}{20} \{ (6-5)(8-6) + (8-5)(8-6) + (4-5)(4-6) + (3-5)(4-6) + (3-5)(3-6) \}}{\sqrt{1.60} \times \sqrt{1.60}} \\
 &= \frac{\frac{1}{20} (2 + 6 + 2 + 4 + 6)}{1.6} \\
 &= \frac{1.0}{1.6} = \frac{5}{8} = \boxed{0.625}
 \end{aligned}$$

ケコサシ

$$\begin{array}{r}
 0.625 \\
 8 \overline{) 5} \\
 \underline{48} \\
 20 \\
 \underline{16} \\
 40
 \end{array}$$

(4) 52人について

| 国語点        | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  | 7  | 8  | 9 |       |
|------------|---|---|---|----|----|----|----|----|---|-------|
| 人数         | 1 | 2 | 3 | 7  | 11 | 16 | 8  | 3  | 1 | 計 52人 |
| (点) × (人数) | 1 | 4 | 9 | 28 | 55 | 96 | 56 | 24 | 9 |       |

$$\begin{aligned}
 (\text{国語点の計}) &= 1 + 4 + 9 + 28 + 55 + 96 + 56 + 24 + 9 \\
 &= \boxed{282} \text{ (点)} \\
 &\quad \text{ズビ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{よって } \left\{ \begin{array}{l} D + E + F = \boxed{8} \quad - \text{①} \\ 4D + 5E + 8F = 5.4 \times 60 - 282 = \boxed{42} \quad - \text{②} \\ 4D + 4E + 6F = 5.4 \times 60 - 288 = 36 \quad - \text{③} \end{array} \right. \text{ である}
 \end{aligned}$$

$$\text{②} - \text{③} \text{ より } E + 2F = 6 \quad - \text{④}$$

$$\text{①} - \text{④} \text{ より } D - F = 2 \quad - \text{⑤}$$

$$\text{④} \text{ ⑤} \text{ より } E = 6 - 2F, \quad D = F + 2 \text{ である}$$

$$\text{③} \text{ に } 4(F + 2) + 4(6 - 2F) + 6F = 36 \text{ より}$$

$$2F = 36 - 8 - 24$$

$$2F = 4$$

$$F = \boxed{2}$$

$$\text{よって } D = F + 2 = \boxed{4}$$

$$E = 6 - 2F = \boxed{2} \quad \text{となる}$$

(5) 40人の英語の平均は

$$\frac{5.4 \times 60 - 6.0 \times 20}{40} = \frac{324 - 120}{40} = \frac{204}{40} = \boxed{5.1} \text{ (点)}$$

ニヌ

| 英語の点       | 3 | 4  | 5  | 6  | 7 | 8 |
|------------|---|----|----|----|---|---|
| 60人の人数     | 2 | 14 | 14 | 20 | 8 | 2 |
| Aクラス20人の人数 | 1 | 2  | 2  | 8  | 5 | 2 |
| 40人の人数     | 1 | 12 | 12 | 12 | 3 |   |

よって 20, 21番どちらも5点より 中央値は  $\boxed{5.0}$  点  
ネノ

(6)

| 国語の点 $x$      | 1 | 2 | 3              | 4 | 5               | 6               | 7              | 8              | 9 |
|---------------|---|---|----------------|---|-----------------|-----------------|----------------|----------------|---|
| 英語の平均 $M(x)$  | 3 | 4 | $\frac{11}{3}$ | 5 | $\frac{24}{13}$ | $\frac{89}{16}$ | $\frac{43}{8}$ | $\frac{34}{5}$ | 7 |
| 英語の中央値 $N(x)$ | 3 | 4 | 4              | 5 | 5               | 6               | 6              | 7              | 7 |

$3.7$        $5.7$        $5.6$        $5.4$        $6.8$   
 $16 \overline{) 89} \begin{array}{r} 5 \\ 80 \\ \hline 9 \\ 80 \\ \hline 100 \end{array}$        $13 \overline{) 74} \begin{array}{r} 5 \\ 65 \\ \hline 9 \\ 78 \\ \hline 120 \end{array}$

$M(x) \neq N(x)$  となる  $x$  は  $x = 3, 5, 6, 7, 8$  の  $\boxed{5}$  個  
ハ

$M(x) < x$  となるのは  $x = 6, 7, 8, 9$

$N(x) < x$  となるのは  $x = 7, 8, 9$

解答記号 正解 配点

よって  $M(x) < x$  かつ  $N(x) < x$  となるのは  $x = 7, 8, 9$  の  $\boxed{3}$  個  
ヒ

|      |       |   |
|------|-------|---|
| ア    | 5     | 1 |
| イ    | 8     | 1 |
| ウエ   | 5.0   | 1 |
| オカキ  | 1.60  | 2 |
| ク    | 5     | 1 |
| ケコサシ | 0.625 | 3 |
| スセソ  | 282   | 1 |
| タ    | 8     | 1 |
| チツ   | 42    | 1 |
| テトナ  | 4.2.2 | 2 |
| ニヌ   | 5.1   | 2 |
| ネノ   | 5.0   | 2 |
| ハ    | 5     | 1 |
| ヒ    | 3     | 1 |

20点

(1) X は 130 行で  $I=0$  からスタートするので

120 行では  $X=1$  とすればよい  $\boxed{ア}$  は ① の  $X=1$

また  $M+N-1$  まで計算するので

$\boxed{イ}$  は ② の  $N-1$

160 行は 8 でわりきれぬ場合なので

$\boxed{ウ}$  は ④ の  $X - \text{INT}(X/8) * 8 = 0$

また  $\boxed{エ}$  は このまま 終了すればよいので ⑤ の  $\text{GOTO } 210$

(2)  $M(M+1)(M+2) \cdots (M+N-1)$  について

$N$  の積

$N$  の積の中に 2 の倍数と 4 の倍数が存在するか

8 の倍数が 1 つ存在すればよい。

$M=1$  のとき  $N=4$  で  $1 \times 2 \times 3 \times 4$  となって OK このとき

$$M+N=5$$

$M=2$  のとき  $N=3$  で  $2 \times 3 \times 4$  となって OK このとき

$$M+N=5$$

よって  $M+N$  の最小値は  $\boxed{5}$  だ

また  $M$  が奇数のとき  $N=4$  であれば 2 の倍数と 4 の倍数の数がそれぞれ存在し、

$M$  が偶数のとき  $N=3$  であれば同様になる

よって どんな  $M$  でも つねに 8 でわりきれないようにする最小の  $N$  は

$$N=\boxed{4} \text{ である}$$

カ

(3) 112行は Cの初期値なので はじめは0個だから ①は④の  $C=0$

160行は  $2^N$  でわりきれぬ場合なので

$$\text{⑦は ④の } X - \text{INT}(X/K) * K = 0$$

180行も  $2^{N+1}$  でわりきれぬ場合なので

$$\text{⑦は ⑤の } X - \text{INT}(X/K) * K > 0$$

( $X - \text{INT}(X/K) * K < 0$  になる場合はない)

182行は Cのカウントをふやせばよいので

$$\text{③は ③の } C = C + 1$$

(4)  $M=4, L=5$  のとき

$N=1$  のとき 種は 4 であり  $2^1$  でわりきれ、 $2^2$  でもわりきれぬので  $\times$

$N=2$  のとき 種は  $4 \times 5 = 20$  であり

$2^2 = 4$  でわりきれ、 $2^3 = 8$  でわりきれぬのでOK

$N=3$  のとき 種は  $4 \times 5 \times 6 = 120$  であり

$2^3 = 8$  でわりきれ、 $2^4 = 16$  でわりきれぬのでOK

$N=4$  のとき 種は  $4 \times 5 \times 6 \times 7 = 840$  であり

$2^4 = 16$  でわりきれぬので  $\times$

$N=5$  のとき 種は  $4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 2^6 \times 5 \times 3 \times 7$  であり

$2^5$  でも  $2^6$  でもわりきれぬので  $\times$

よって  $C = \text{②}$  サ

(5) PRINT N は 条件に合ったところなので

180 ~ 200 の間にいれればよい

よって ⑤は②の 180 と 182 の間

解答記号 正解 配点

|   |   |   |
|---|---|---|
| ア | 1 | 2 |
| イ | 2 | 2 |
| ウ | 4 | 2 |
| エ | 5 | 2 |
| オ | 5 | 1 |
| カ | 4 | 1 |
| キ | 0 | 2 |
| ク | 4 | 1 |
| ケ | 5 | 2 |
| コ | 3 | 2 |
| サ | 2 | 1 |
| シ | 2 | 2 |