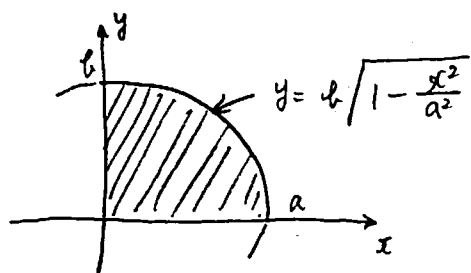


$$\begin{aligned}
 (1) \quad b_n &= \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n \frac{27}{10} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \\
 &= \frac{\frac{27}{10} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}}{1 - \frac{2}{3}} \\
 &= 3 \cdot \frac{27}{10} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} = \boxed{\frac{81}{10} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\}}
 \end{aligned}$$

(2) 円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ を考える. ($a > 0, b > 0$)
 これは x 軸, y 軸対称であるから 第1象限の
 部分の面積を4倍すれば円の面積となる. この面積を S とすると



$$\begin{aligned}
 S &= 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx \\
 &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad \text{となり}
 \end{aligned}$$

$x = a \sin \theta$ とおくと

$$dx = a \cos \theta d\theta, \quad \begin{array}{c|c} x & 0 \cdots a \\ \hline \theta & 0 \cdots \frac{\pi}{2} \end{array} \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned}
 S &= 4 \times \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta \\
 &= 4 \times \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 \theta d\theta \\
 &= 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= 2ab \left[\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2ab \times \frac{\pi}{2} = \boxed{\pi ab}
 \end{aligned}$$

となる."

$$\frac{x^2}{\left(\frac{43}{2} - b_m\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{81}{10} + b_m\right)^2} = 1 \quad \text{の面積 } S_m \text{ は}$$

$$S_m = \pi \left| \frac{43}{2} - b_m \right| \left| \frac{81}{10} + b_m \right| \quad \text{となる.}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって } S_n &= \pi \left| \frac{43}{2} - \frac{81}{10} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \right| \left| \frac{81}{10} + \frac{81}{10} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \right| \\
&= \pi \left| \frac{215}{10} - \frac{81}{10} + \frac{81}{10} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right| \left| \frac{162}{10} - \frac{81}{10} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right| \\
&= \pi \left| \left\{ \frac{134}{10} + \frac{81}{10} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \left\{ \frac{162}{10} - \frac{81}{10} \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \right| \\
&= \frac{\pi}{100} \left| \left\{ 134 + 81 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \left\{ 162 - 81 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \right| \\
&= \frac{\pi}{100} \times 81^2 \left| \left\{ \frac{134}{81} + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \left\{ 2 - \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \right| \\
&= \frac{81^2}{100} \pi \left| - \left(\frac{2}{3} \right)^{2n} + \frac{28}{81} \left(\frac{2}{3} \right)^n + \frac{268}{81} \right| \\
&= \frac{81^2}{100} \pi \left| - \left\{ \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{14}{81} \right\}^2 + \frac{14^2}{81^2} + \frac{268}{81} \right|
\end{aligned}$$

ここで $n \geq 1$ より $0 < \left(\frac{2}{3} \right)^n \leq \frac{2}{3}$ であり

$\left| \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{14}{81} \right|$ の値が最小のとき S_n は最大となる。

$$a_n = \left| \left(\frac{2}{3} \right)^n - \frac{14}{81} \right| \text{ とおくと}$$

$$a_1 = \left| \frac{2}{3} - \frac{14}{81} \right| = \left| \frac{54}{81} - \frac{14}{81} \right| = \frac{40}{81}$$

$$a_2 = \left| \frac{4}{9} - \frac{14}{81} \right| = \left| \frac{36}{81} - \frac{14}{81} \right| = \frac{22}{81} < a_1$$

$$a_3 = \left| \frac{8}{27} - \frac{14}{81} \right| = \left| \frac{24}{81} - \frac{14}{81} \right| = \frac{10}{81} < a_2$$

$$a_4 = \left| \frac{16}{81} - \frac{14}{81} \right| = \frac{2}{81} = \frac{6}{243} < a_3$$

$$a_5 = \left| \frac{32}{243} - \frac{14}{81} \right| = \left| \frac{32}{243} - \frac{42}{243} \right| = \frac{10}{243} > a_4$$

$n \geq 6$ のとき $0 < \left(\frac{2}{3} \right)^n < \frac{32}{243}$ より $a_n > a_5$ となる。

よって S_n の値は $n=4$ で最小となり その値 S_4 は、

$$\begin{aligned}
S_4 &= \frac{81^2}{100} \pi \left| -a_4^2 + \frac{14^2}{81^2} + \frac{268}{81} \right| \\
&= \frac{81^2}{100} \pi \left| -\frac{4}{81^2} + \frac{196}{81^2} + \frac{268 \times 81}{81^2} \right| \\
&= \frac{81^2}{100} \pi \times \frac{4}{81^2} \left| -1 + 49 + 67 \times 81 \right| \\
&= \frac{1}{25} \pi \times 5475 = \boxed{219\pi}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
5 \overline{) 5475} \\
5 \overline{) 1095} \\
\hline
219
\end{array}$$