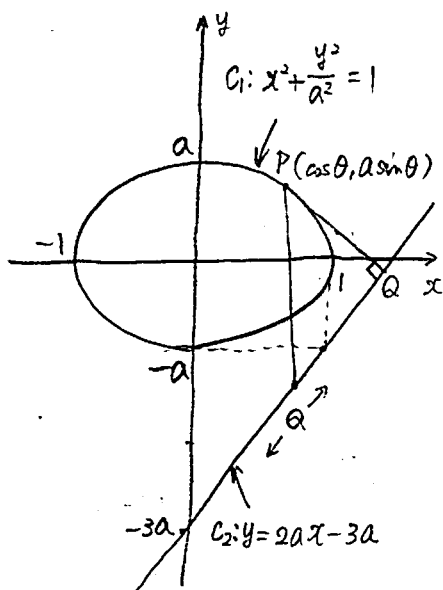




1) C_1 上の点 $P(\cos \theta, a \sin \theta)$ とおける

P をまず固定して考えると

PQ の長さが最小になるときは

PQ と直線 C_2 が垂直になっているときであり

このときの PQ の長さは

$(\cos \theta, a \sin \theta)$ と $y - 2ax + 3a = 0$ との

距離となるから

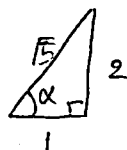
$$PQ = \frac{|a \sin \theta - 2a \cos \theta + 3a|}{\sqrt{1 + (-2a)^2}}$$

$$= \frac{a |\sin \theta - 2 \cos \theta + 3|}{\sqrt{1 + 4a^2}} \quad \text{となる}$$

$$\therefore PQ = \frac{a |\sqrt{5} \sin(\theta - \alpha) + 3|}{\sqrt{1 + 4a^2}} \quad \left(\text{但し } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

とすると

$$-1 \leq \sqrt{5} \sin(\theta - \alpha) \leq 1 \quad \text{より}$$



PQ は $\sin(\theta - \alpha) = -1$ の最小値をとり、それが $f(a)$ となるから

$$f(a) = \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{1 + 4a^2}} \quad \text{となる}$$

$$(2) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} f(a) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(3 - \sqrt{5})a}{\sqrt{1 + 4a^2}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(3 - \sqrt{5})}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + 4}} = \boxed{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \quad \text{である}$$