

①

数学Ⅰ・数学A (100点満点)

問 題 番 号 (配点)	解答記号	正 解	配点	問 題 番 号 (配点)	解答記号	正 解	配点
第 1 問 (20)	$\frac{\text{ア} - \sqrt{\text{イ}}}{\text{ウ}}$	$\frac{3 - \sqrt{3}}{2}$	2	第 3 問 (30)	ア	2	3
	エ, オ	2, 1	4		イウ	9 0	2
	カ	3	2		エ $\sqrt{\text{オ}}$	$3\sqrt{2}$	2
	キ	0	2		$\frac{\text{カ}}{\text{キ}}$	$\frac{1}{3}$	3
	ク	1	2		ク	2	3
	ケ	6	3		ケコサ	1 8 0	2
	コ	4	2		シス	4 5	3
	サ	7	3		セソ	9 0	3
	第 2 問 (25)	ア, イ	1, 9		3	第 4 問 (25)	タ $\sqrt{\text{チ}}$
$\frac{\text{ウ}}{a} - \text{エ}$		$\frac{3}{a} - 1$	2	$\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$	$\frac{1}{2}$		3
オ $a + \text{カキ} - \frac{\text{ク}}{a}$		$-a + 10 - \frac{9}{a}$	3	ト, ナ	1, 3 または 3, 1		3
$\frac{\text{ケ}}{\text{コ}}, \text{サ}$		$\frac{1}{3}, 3$	2	アイウ	1 0 5		4
$\frac{\text{シス}}{\text{セ}}, \text{ソ}$		$-\frac{2}{3}, 2$	2	エオ	1 5		2
タ		3	2	カキ	9 0		2
チ		0	2	$\frac{\text{ク}}{\text{ケコ}}$	$\frac{2}{21}$		2
ツ		4	2	$\frac{\text{サ}}{\text{シス}}$	$\frac{4}{21}$		2
テト		-1	2	$\frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$	$\frac{2}{7}$		3
ナ $a + \text{ニヌ}$		$-a + 10$	3	タ $\frac{\text{チ}}{\text{テ}}$	$\frac{2}{7}$		3
	ネ	6	2	ツ $\frac{\text{テ}}{\text{チ}}$	$\frac{1}{7}$	3	
				トナ $\frac{\text{ニヌ}}{\text{チ}}$	$\frac{80}{21}$	4	

第1問

$$(1) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} = \frac{3-\sqrt{3}}{3-1} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sqrt{3} \approx 1.7 \text{ より } \frac{3-\sqrt{3}}{2} \approx \frac{3-1.7}{2} = \frac{1.3}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.7}{2}$$

$$1 = \frac{2}{2} \quad \text{だから}$$

3つのうち最小のものは $\boxed{\text{②}} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$, 最大のものは $\boxed{\text{①}} \cdot 1$ となる

$$(2) \frac{\sqrt{3}}{2} \approx \frac{1.7}{2} = \frac{3.4}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \approx \frac{1.3}{2} = \frac{2.6}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 \approx \left(\frac{1.3}{2}\right)^2 = \frac{1.69}{4} \quad \text{であるから 最小のものは } \boxed{\text{③}} \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$$

$$\text{最大のものは } \boxed{\text{①}} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

解答記号	正解	配点
アイウ	332	2
エオ	21	4
カ	3	2
キ	0	2

10点

(1) p : 「 m, n の少なくとも1つは3の倍数でない」の否定 $\bar{p}$ は

$\bar{p}$: 「 m, n はともに3の倍数である」である ㉑

q の否定 $\bar{q}$ は 「 $m+n, m-n$ の両方とも3の倍数」 となり

$\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ は 明らかに なりたつから $q \Rightarrow p$ は 真

また m を 3 でわった 余りは 0, 1, 2 のいずれかであり

n も同様だから

(m, n) の組合せは 9通り考えられ、下表のようになる

3でわった余りの表

m	n	$m+n$	$m-n$	p	q
0	0	0	0	x	x
0	1	1	2	o	o
0	2	2	1	o	o
1	0	1	1	o	o
1	1	2	0	o	o
1	2	0	2	o	o
2	0	2	2	o	o
2	1	0	1	o	o
2	2	1	0	o	o

よって $p \Leftrightarrow q$ となる

p は q であるための
必要十分条件となる
ケ ㉒

(2) $\bar{s}$ は 「 $m+n, m-n$ の両方とも4の倍数」 であるから

$m+n = 4k, m-n = 4l$ (k, l は整数) とできて

辺々たすと $2m = 4(k+l)$ より $m = 2(k+l)$ で偶数

辺々ひくと $2n = 4(k-l)$ より $n = 2(k-l)$ で偶数

よって ㉓ がなりたつ。

4でわった余りの表

m	n	$m+n$	$m-n$	r	s
0	0	0	0	x	x
0	1	1	3	o	o
0	2	2	2	o	o
0	3	3	1	o	o
1	0	1	1	o	o
1	1	2	0	o	o
1	2	3	3	o	o
1	3	0	2	o	o
2	0	2	2	o	o
2	1	3	1	o	o
2	2	0	0	o	x
2	3	1	3	o	o
3	0	3	3	o	o
3	1	0	2	o	o
3	2	1	1	o	o
3	3	2	0	o	o

左表より $r \Leftrightarrow s$ がなりたつこと

s であるためには

r の中に入っていることが

必要 となる

㉔

解答記号	正解	配点
ク	1	2
ケ	6	3
コ	4	2
サ	7	3

10点

第2問

$ax^2 - (6-2a)x + 4 = 0$ の判別式を D とすると
 グラフ G が x 軸と共有点をもたないとき $D < 0$ より

$$\frac{D}{4} = \{-(3-a)\}^2 - a \times 4 < 0 \quad \text{だから}$$

$$a^2 - 6a + 9 - 4a < 0$$

$$a^2 - 10a + 9 < 0$$

$$(a-1)(a-9) < 0$$

$$\text{よって } \boxed{1} < a < \boxed{9}$$

ア

イ

また $y = ax^2 - (6-2a)x + 4$

$$= a \left(x - \frac{3-a}{a} \right)^2 - \frac{(3-a)^2}{a} + 4$$

$$= a \left\{ x - \left(\frac{3}{a} - 1 \right) \right\}^2 + \frac{-9 + 6a - a^2 + 4a}{a}$$

$$= a \left\{ x - \left(\frac{3}{a} - 1 \right) \right\}^2 - a^2 + 10 - \frac{9}{a} \quad \text{より}$$

$$G \text{ の頂点は } \left(\underbrace{\frac{3}{a}}_{\text{オ}} - \underbrace{1}_{\text{カ}}, \underbrace{-a^2}_{\text{キ}} + \underbrace{10}_{\text{ク}} - \underbrace{\frac{9}{a}}_{\text{ケ}} \right) \quad \text{となる}$$

$$k = \frac{a}{3} - 1 \quad \text{とおけば} \quad 1 < a < 9 \text{ より}$$

$$1 > \frac{1}{a} > \frac{1}{9} \quad \text{だから}$$

$$\boxed{3} > \frac{3}{a} > \boxed{\frac{1}{3}} \quad \text{ケ} \quad \text{なので}$$

$$\boxed{2} > \frac{3}{a} - 1 > \boxed{\frac{-2}{3}} \quad \text{シ} \quad \text{となる}$$

(1) $1 < a < 9$ より グラフ G は下に凸であるから

$x = k$ で最小値をとるのは $-1 \leq k < 0$ のときだから

$$-1 \leq \frac{3}{a} - 1 < 0 \quad \text{より}$$

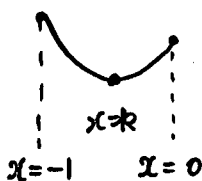
$$0 \leq \frac{3}{a} < 1$$

$$0 \leq \frac{1}{a} < \frac{1}{3}$$

$$a > 3$$

$$\text{よって } \boxed{3} < a < 9 \quad \text{のときとなる}$$

ク



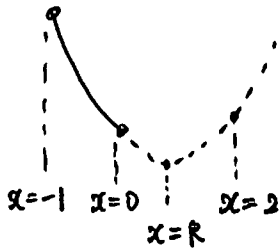
解答記号	正解	配点
ア	19	3
ウエ	31	2
オカキ	-109	3
ケコ	133	2
シセリ	-232	2
ク	3	2
チ	0	2
ツ	4	2
テト	-1	2
ナニヌ	-10	3
ネ	6	2
		25点

また $1 < a \leq 3$ のときは $1 > \frac{1}{a} \geq \frac{1}{3}$ より

$$3 - 1 > \frac{3}{a} - 1 \geq \frac{3}{3} - 1 \quad \text{だから}$$

$$2 > k \geq 0 \quad \text{となるので}$$

$x = \boxed{0}$ で 最小値 $\boxed{4}$ となる
チ ッ



(2) (i) $-\frac{1}{2} \leq k$ のとき

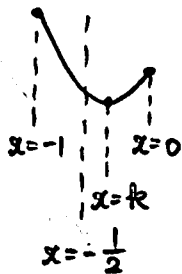
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{3}{a} - 1 \quad \text{より}$$

$$\frac{1}{2} \leq \frac{3}{a}$$

$$\frac{1}{6} \leq \frac{1}{a}$$

よって $6 \leq a$ のとき

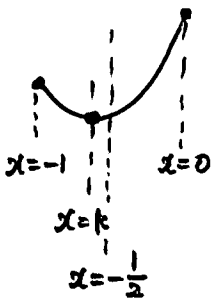
$$x = -1 \text{ で 最大値 } M = a + (6 - 2a) + 4 = -a + 10$$



(ii) $-\frac{1}{2} > k$ のとき

すなわち $6 < a$ のとき

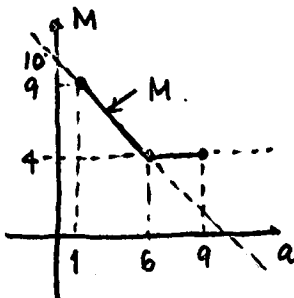
$x = 0$ で 最大値 4 をとる。



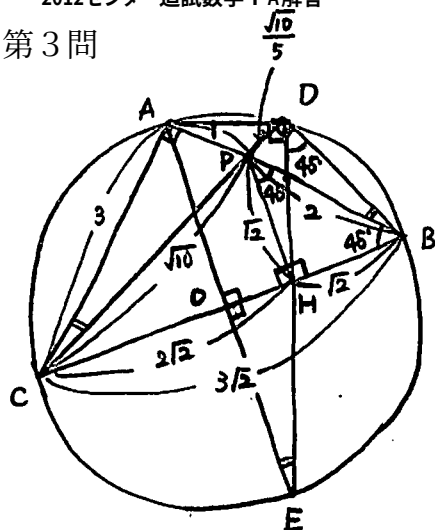
以上のことから $M = \begin{cases} -a + 10 & (1 < a \leq 6) \\ 4 & (6 < a < 9) \end{cases}$ となるので

$M > 4$ となるとき $x = \boxed{-1}$ で $M = \boxed{-}a + \boxed{10}$ をとる。
チ ト

但し $1 < a < \boxed{6}$ となる



第3問



方べきの定理より $AP \cdot PB = PC \cdot PD$ だから

$$1 \cdot PB = \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{10}}{5} \quad \text{より}$$

$$PB = \frac{10}{5} = \boxed{2} \quad \text{ア}$$

$\triangle ACP$ で余弦定理より

$$\cos A = \frac{1^2 + 3^2 - (\sqrt{10})^2}{2 \times 1 \times 3} = 0 \quad \text{だから}$$

$$\angle CAP = \boxed{90^\circ} \quad \text{イウ}$$

BCは円の直径となる。よって $\triangle ABC$ で三平方の定理から

$$BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \boxed{3\sqrt{2}} \quad \text{エオ}$$

$$\tan \angle PCA = \frac{AP}{AC} = \frac{1}{3} \quad \text{カキ}$$

$\triangle ABC$ は $A=90^\circ$, $B=C=45^\circ$ の直角二等辺三角形だから

$\triangle PHB$ も $\angle PHB=90^\circ$, $\angle PBH=\angle BPH=45^\circ$ の直角二等辺三角形となり

PBが外接円の直径となって $\boxed{2}$ である

また $\angle PHB = \angle BDP = \boxed{180^\circ}$ であるから

四角形PHBDは円に内接する。

よって円周角の定理より $\angle BDH = \angle BPH = \boxed{45^\circ}$

$\angle BDE = 45^\circ$ だから $\angle BOE = \boxed{90^\circ}$

よってAEも円の直径となり $\boxed{3\sqrt{2}}$ である。

$$\tan \angle PCH = \frac{PH}{CH} = \frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \quad \text{ツテ}$$

円周角の定理より $\angle AED = \angle ACD$ だから

$$\triangle AED \sim \triangle PCA \sim \triangle HEO$$

ト① ナ③

解答記号	正解	配点
ア	2	3
イウ	90	2
エオ	32	2
カキ	13	3
ク	2	3
ケコサ	180	2
シス	45°	3
セリ	90	3
タチ	32	3
ツテ	12	3
トナ	13 or 31	3

30点

第4問

$$\text{すべてのとりだし方は } {}_{15}C_2 = \frac{{}_{15}P_2}{2!} = \frac{15 \cdot 14}{2 \cdot 1} = \boxed{105} \text{ (通り)}$$

このうち文字が同じである場合は、5つの文字からどの文字かをえらぶのは5通りで

$$1, 2, 3 \text{ から 2つをえらぶので } 5 \times {}_3C_2 = 5 \times 3 = \boxed{15} \text{ (通り)}$$

カードの文字が異なっているのは 文字のえらび方は ${}_5C_2$ であり

数字のえらび方は それぞれ 3通りずつあるので

$${}_5C_2 \times 3 \times 3 = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} \times 9 = \boxed{90} \text{ (通り)}$$

得点が6点となるのは、まず文字が異なる場合であり

2枚の数字がともに3でなければいけないから

$$\frac{{}_5C_2 \times 1 \times 1}{{}_{15}C_2} = \frac{10}{105} = \boxed{\frac{2}{21}} \text{ ?}$$

得点が5点となるのは、文字が異なり、2枚の数字が2と3である

例えば文字が A, B なら A2-B3 と A3-B2 の2通りあるので

$$\frac{{}_5C_2 \times 2}{{}_{15}C_2} = \frac{20}{105} = \boxed{\frac{4}{21}} \text{ サ}$$

得点が4点となるときは、文字が異なり、2枚の数字が

2-2, 1-3, 3-1 のときであるから

$$\frac{{}_5C_2 \times 3}{{}_{15}C_2} = \frac{10 \times 3}{105} = \frac{6}{21} = \boxed{\frac{2}{7}} \text{ ?}$$

得点が3点となるときは、

① 文字が異なり、2枚の数字が1-2, 2-1のとき

$$\frac{{}_5C_2 \times 2}{{}_{15}C_2} = \frac{20}{105}$$

② 文字が同じで、2枚の数字が、3-1, 3-2のとき

文字のえらび方は 5通りであるので

$$\frac{5 \times 2}{{}_{15}C_2} = \frac{10}{105}$$

$$\text{よって 3点となるのは } \frac{20}{105} + \frac{10}{105} = \frac{30}{105} = \frac{6}{21} = \boxed{\frac{2}{7}} \text{ ?}$$

得点が2点となるのは

① 文字が異なり、2枚の数字が1-1のとき

$$\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} = \frac{10}{105}$$

② 文字が同じで、2枚の数字が2-1のとき

$$\frac{5 \times 1}{{}_{15}C_2} = \frac{5}{105}$$

$$\text{よって 2点となるのは } \frac{10}{105} + \frac{5}{105} = \frac{15}{105} = \frac{3}{21} = \boxed{\frac{1}{7}} \text{ ヲテ}$$

よって 得点の期待値は

得点	6	5	4	3	2	計
確率	$\frac{2}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$	1

$$6 \times \frac{2}{21} + 5 \times \frac{4}{21} + 4 \times \frac{6}{21} + 3 \times \frac{6}{21} + 2 \times \frac{3}{21}$$

$$= \frac{2}{21} (6 + 10 + 12 + 9 + 3) = \frac{2}{21} \times 40 = \boxed{\frac{80}{21}} \text{ トナニヌ}$$

解答記号	正解	配点
アイウ	105	4
エオ	15	2
カキ	90	2
クケコ	221	2
サシス	421	2
セソ	27	3
タチ	27	3
ツテ	17	3
トナニヌ	8021	4

25点