数学Ⅰ・数学A　(100点満点)

問題番号(配点)	解答記号	正解	配点
第1問 (20)	$\dfrac{1}{(1+\sqrt{6})^2-\text{ア}}$	$\dfrac{1}{(1+\sqrt{6})^2-3}$	2
	$\dfrac{\sqrt{6}-\text{イ}}{\text{ウ}}$	$\dfrac{\sqrt{6}-2}{4}$	3
	$\text{エ}+\text{オ}\sqrt{6}$	$2+2\sqrt{6}$	2
	$\dfrac{\text{カ}-\sqrt{6}}{\text{キ}}$	$\dfrac{4-\sqrt{6}}{2}$	3
	ク	1	3
	ケとコ	1と4または4と1	4*
	サ	2	3
第2問 (25)	ア	4	3
	$\text{イ}\,t^2-\text{ウエ}\,t+\text{オカ}$	$7t^2-16t+32$	3
	$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\dfrac{8}{7}$	3
	$\dfrac{\text{ケコサ}}{\text{シ}}$	$\dfrac{160}{7}$	3
	$\dfrac{\text{ス}}{\text{セ}} \leqq a \leqq \dfrac{\text{ソ}}{\text{タ}}$	$\dfrac{1}{7} \leqq a \leqq \dfrac{8}{7}$	3
	$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツテ}}$	$\dfrac{9}{14}$	3
	$\dfrac{\text{ト}}{\text{ナ}}$	$\dfrac{5}{2}$	3
	$\dfrac{\text{ニヌ}}{\text{ネ}}$	$\dfrac{-5}{4}$	2
	$\dfrac{\text{ノハヒ}}{\text{フ}}$	$\dfrac{-25}{8}$	2

(注) *は，両方正解の場合は4点，片方のみ正解の場合は2点を与える。

問題番号(配点)	解答記号	正解	配点
第3問 (30)	$\sqrt{\text{アイ}}$	$\sqrt{10}$	3
	$\dfrac{\text{ウ}\sqrt{\text{エオ}}}{\text{カ}}$	$\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$	3
	$\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$	$\dfrac{4}{5}$	2
	$\dfrac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$	$\dfrac{24}{5}$	2
	$\dfrac{\text{シスセ}}{\text{ソタ}}$	$\dfrac{216}{25}$	3
	$\dfrac{\text{チ}}{\text{ツ}}$	$\dfrac{6}{5}$	3
	$\dfrac{\text{テト}}{\text{ナ}}$	$\dfrac{12}{5}$	3
	ニ	2	3
	$\dfrac{\text{ヌ}\sqrt{\text{ネノ}}}{\text{ハ}}$	$\dfrac{6\sqrt{10}}{5}$	2
	$\dfrac{\sqrt{\text{ヒフ}}}{\text{ヘ}}$	$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$	3
	ホ	2	3
第4問 (25)	アイウ	256	3
	エオ	24	3
	カ	6	2
	キ	6	2
	クケ	36	2
	$\dfrac{\text{コ}}{\text{サシ}}$	$\dfrac{1}{64}$	2
	$\dfrac{\text{ス}}{\text{セソ}}$	$\dfrac{9}{64}$	2
	$\dfrac{\text{タ}}{\text{チツ}}$	$\dfrac{3}{16}$	3
	$\dfrac{\text{テ}}{\text{トナ}}$	$\dfrac{9}{16}$	4
	$\dfrac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$	$\dfrac{3}{2}$	2

$$AB = \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{(1+\sqrt{6})^2-\underset{ア}{\boxed{3}}}$$

$$= \frac{1}{1+6+2\sqrt{6}-3}$$

$$= \frac{1}{4+2\sqrt{6}}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{6}}{16-24}$$

$$= \frac{4-2\sqrt{6}}{-8} = \frac{\sqrt{6}-\overset{イ}{\boxed{2}}}{\underset{ウ}{\boxed{4}}}$$ であり

$$\frac{1}{A}+\frac{1}{B} = 1+\sqrt{3}+\sqrt{6}+1-\sqrt{3}+\sqrt{6} = \overset{エ}{\boxed{2}}+\overset{オ}{\boxed{2}}\sqrt{6}$$

よって $\frac{1}{A}+\frac{1}{B} = \frac{A+B}{AB}$ だから

$$A+B = AB\times\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}-2}{4}\times(2+2\sqrt{6})$$

$$= \frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+1)}{2}$$

$$= \frac{6-\sqrt{6}-2}{2} = \frac{\overset{カ}{\boxed{4}}-\sqrt{6}}{\underset{キ}{\boxed{2}}}$$ となる

解答記号	正解	配点
ア	3	2
イウ	2 4	3
エオ	2 2	2
カキ	4 2	3
		10点

(1) 「$r \Rightarrow$ (pまたはq)」の対偶は「$\boxed{(\overline{p}\text{かつ}\overline{q})} \Rightarrow \overline{r}$」である

ク ①

(2)

	p	q	r
⓪	×	×	×
①	○	○	×
②	×	○	○
③	○	×	○
④	×	○	×

真を○，偽を×とすると左図のようになるから

pまたはq をみたすのは

①②③④ であり

このうち r をみたさないのは

① ④ である

よって「(pまたはq) $\Rightarrow r$」の反例となっているのは

$\boxed{①}$ と $\boxed{④}$ である

ケ　コ

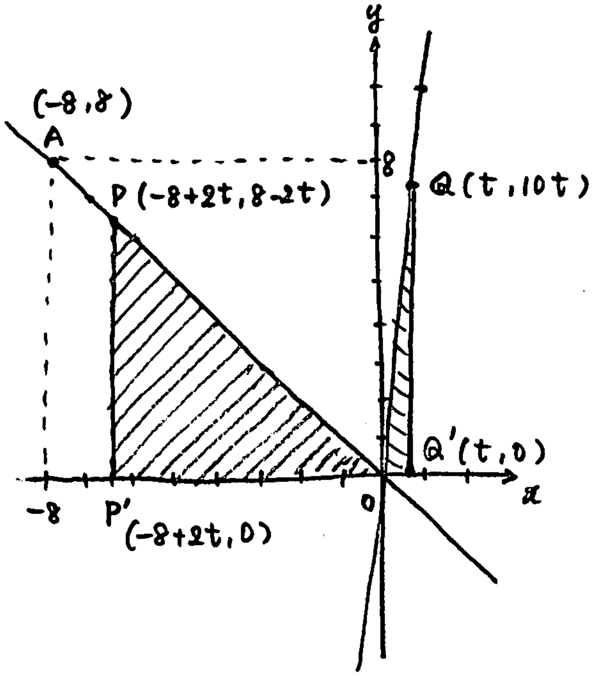
(3) 「$r \underset{\Leftarrow\!\!\!/}{\Rightarrow}$ (pまたはq)」がなりたっているので

(pまたはq) をみたすためには

r がなりたてば それで $\boxed{十分}$ である

サ ②

解答記号	正解	配点
ク	1	3
ケコ	14 or 41	4
サ	2	3
		10点



(1) Pは $\overset{\text{ア}}{\boxed{4}}$ 秒後に O に到着する

Pは $(-8+2t,\ 8-2t)$

Qは $(t,\ 10t)$

とできるから

$$S = \frac{1}{2}\{0-(-8+2t)\}\times(8-2t) + \frac{1}{2}t\times 10t$$

$$= \frac{1}{2}(8-2t)^2 + 5t^2$$

$$= \frac{1}{2}(64-32t+4t^2)+5t^2$$

$$= 32-16t+2t^2+5t^2$$

$$= \underset{\text{イ}}{\boxed{7}}t^2 - \underset{\text{ウエ}}{\boxed{16}}t + \underset{\text{オカ}}{\boxed{32}}$$

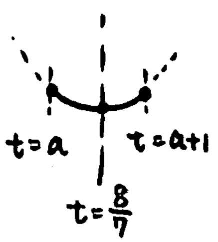
$$= 7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2 - \frac{64}{7} + \frac{224}{7}$$

$$= 7\left(t-\frac{8}{7}\right)^2 + \frac{160}{7}$$

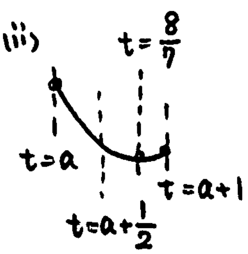
よって S は $t = \boxed{\frac{8}{7}}\,\frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ で最小値 $\boxed{\frac{160}{7}}\,\frac{\text{ケコサ}}{\text{シ}}$ をとる

(i) $a \leqq \frac{8}{7} \leqq a+1$ であればよいから

$\boxed{\frac{1}{7}}\,\frac{\text{ス}}{\text{セ}} \leqq a \leqq \boxed{\frac{8}{7}}\,\frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$ のとき Sは $t=\frac{8}{7}$ で最小となる



(ii)



$a+\frac{1}{2} \leqq \frac{8}{7}$ であれば $t=a$ で最大となるから

$a \leqq \frac{16-7}{14} = \frac{9}{14}$ であり

aは正より $0 < a \leqq \boxed{\frac{9}{14}}\,\frac{\text{チ}}{\text{ツテ}}$ となる

(2) O, P, Q を通る2次関数のグラフは原点を通るので

$y = px^2 + qx$ とおくことができる

これが $y=2x^2$ のグラフを平行移動したものとなるので $p=2$ であるから

$y = 2x^2 + qx$ ―① とおける

これが $(t, 10t)$ を通るので $10t = 2t^2 + qt$ ―②

$(-8+2t, 8-2t)$ を通るので

$8-2t = 2(-8+2t)^2 + q(-8+2t)$ ―③

をみたす

②は $t \neq 0$ であるから $10 = 2t + q$ より

$q = 10 - 2t$ ―④ である

これを③に代入して $8-2t = 2(8-2t)^2 - (10-2t)(8-2t)$ より

$(8-2t)\{1-2(8-2t)+(10-2t)\} = 0$ だから

$(8-2t)(2t-5) = 0$.

$0<t<4$ より $t = \boxed{\dfrac{5}{2}}$ トナ となる

このとき ④から $q = 10 - 2 \times \dfrac{5}{2} = 5$ だから

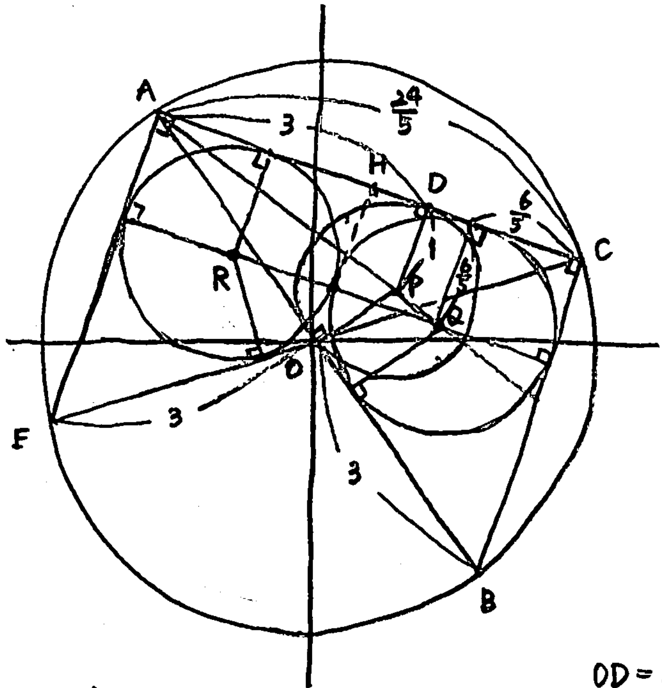
①は $y = 2x^2 + 5x$

$= 2\left(x+\dfrac{5}{4}\right)^2 - \dfrac{25}{8}$ となるから

$y=2x^2$ を x軸方向に $\boxed{\dfrac{-5}{4}}$ ニヌネ

y軸方向に $\boxed{\dfrac{-25}{8}}$ ノハヒフ 平行移動したものとなる

解答記号	正解	配点
ア	4	3
イウエオカ	71632	3
キク	87	3
ケコサシ	1607	3
スセソタ	1787	3
チツテ	914	3
トナ	52	3
ニヌネ	−54	2
ノハヒフ	−258	2
		25点



$AP=\sqrt{3^2+1^2}=\boxed{\sqrt{10}}$ アイ

ODの中点をMとすると

$\angle OMD=90^\circ$ である

また

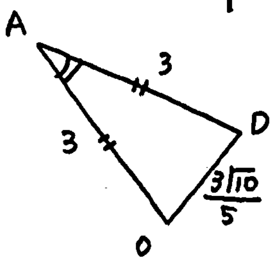
$\angle ADP=90^\circ$ でもあるから

$\sin\angle PAD=\dfrac{DP}{AP}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ だから

$MD=AD\sin\angle PAD$

$=3\times\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ より

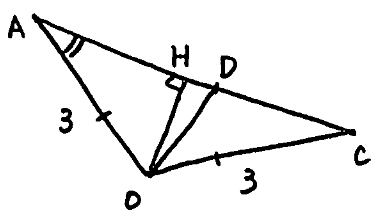
$OD=2MD=\dfrac{6}{\sqrt{10}}=\boxed{\dfrac{3\sqrt{10}}{5}}$ ウエオ カ



よって $\cos\angle OAD=\dfrac{3^2+3^2-\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)^2}{2\times3\times3}$

$=\dfrac{18-\frac{9\times10}{25}}{18}$

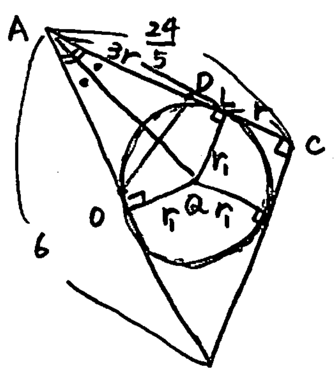
$=\dfrac{18-\frac{18}{5}}{18}=\dfrac{1-\frac{1}{5}}{1}=\boxed{\dfrac{4}{5}}$ キ ク



また ACの中点を Hとすると

$AH=3\times\cos\angle OAD=3\times\frac{4}{5}=\frac{12}{5}$ だから

$AC=2AH=\boxed{\dfrac{24}{5}}$ ケコ サ



$\sin\angle OAD=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$ であるので

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times6\times\frac{24}{5}\times\frac{3}{5}=\boxed{\dfrac{216}{25}}$ シスセ ソタ

△ABCの内接円の中心をQ，ACとの接点をLとすると

$\triangle AQL\backsim\triangle APD$ より

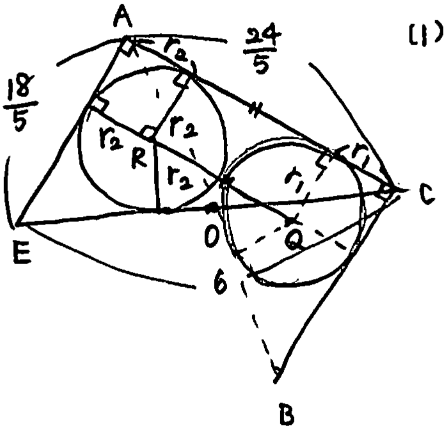
$AL:LQ=AD:DP$ だから 半径 r_1 として

$AL:r_1=3:1$

よって $AL=3r_1$ となる

また ABは円の直径より $\angle ACB=90^\circ$ だから $LC=r_1$

よって $AC=AL+LC$ より $\frac{24}{5}=3r_1+r_1$ だから $r_1=\boxed{\dfrac{6}{5}}$ チ ツ



(1) また △CEAの内接円の半径を r_2 とすると

△ABC ≡ △CEA であるから

$$r_2 = r_1 = \frac{6}{5}$$

よって $QR = AC - r_1 - r_2$

$$= \frac{24}{5} - \frac{6}{5} - \frac{6}{5}$$

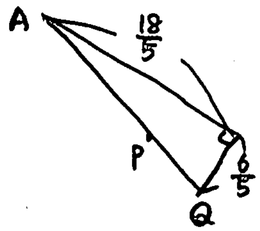
$$= \boxed{\frac{12}{5}}$$ テト ナ となる

ゆえに $QR = r_1 + r_2$ となっているので

円QとRは $\boxed{②}$ 外接している。
ニ

(2) $AQ^2 = \left(\frac{18}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2(3^2+1)$

$= \left(\frac{6}{5}\right)^2 \times 10$ だから



$$AQ = \boxed{\frac{6\sqrt{10}}{5}}$$ ヌネノ ハ

よって $PQ = AQ - AP = \frac{6\sqrt{10}}{5} - \sqrt{10} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{5}}$ ヒフ ヘ となる

$r_1^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25}$

$PQ^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{10}{25}$ であるので $r_1^2 > PQ^2$ だから

$r_1 > PQ$

ゆえに Pは円Qの内部にある。

また 円Pの半径は1であり $1 > \frac{\sqrt{10}}{5}$ より

点Qは円Pの内部にある

よって $\boxed{ホ}$ は ②となる。

解答記号	正解	配点
アイ	10	3
ウエオカ	3105	3
キク	45	2
ケコサ	245	2
シスセソタ	21625	3
チツ	65	3
テトナ	125	3
ニ	2	3
ヌネノハ	6105	2
ヒフヘ	105	3
ホ	2	3

30点

(1) $4^4 = 256$ より $\boxed{256}$ 個 (アイウ)

(2) 重複なくつかってできるのは $4! = 24$ より $\boxed{24}$ 個 (エオ)

(3) (i) 1〜4から異なる2つをえらぶ方法は ${}_4C_2 = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = \boxed{6}$ (通り) (カ)

(ii) このうち小さい方をどの位におくかは ${}_4C_2 = \boxed{6}$ (通り) (キ)

(iii) (i)(ii)より求める個数は $6\times6 = \boxed{36}$ (個) (クケ)

(4) (i) 9点となるのは 1111, 2222, 3333, 4444 の4通りのみだから

$\frac{4}{256} = \boxed{\frac{1}{64}}$ コ/サシ

3点となるのは (3)より 36通りだから

$\frac{36}{256} = \boxed{\frac{9}{64}}$ ス/セソ

(ii) 2点となるのは

1〜4から2つえらび (${}_4C_2 = 6$)

3回の方と1回の方で2通り,

3回の数字がどの位に入るかは ${}_4C_3 = 4$

よって $6\times2\times4 = 48$ (通り) より

確率は $\frac{48}{256} = \frac{12}{64} = \boxed{\frac{3}{16}}$ タ/チツ

1点となるのは

1〜4から3つえらび (${}_4C_3 = 4$)

この中から2回現れる数字をえらぶのは3通り

そして ○○△□ のならびかえは $\frac{4!}{2!} = \frac{4\cdot3\cdot2}{2} = 12$ (通り)

よって $4\times3\times12 = 144$ (通り) より

確率は $\frac{144}{256} = \frac{36}{64} = \boxed{\frac{9}{16}}$ テ/トナ

0点は $4! = 24$ (通り) より $\frac{24}{256} = \frac{6}{64}$

得点	9	3	2	1	0
確率	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{12}{64}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{6}{64}$

よって得点の期待値は

$9\times\frac{1}{64} + 3\times\frac{9}{64} + 2\times\frac{12}{64} + 1\times\frac{36}{64} + 0\times\frac{6}{64}$

$= \frac{1}{64}(9+27+24+36)$

$= \frac{96}{64} = \frac{24}{16} = \boxed{\frac{3}{2}}$ ニ/ヌ

解答記号	正解	配点
アイウ	256	3
エオ	24	3
カ	6	2
キ	6	2
クケ	36	2
コサシ	164	2
スセソ	964	2
タチツ	316	3
テトナ	916	4
ニヌ	32	2

25点